Masduki - Ichwan Budi Utomo

Matematika IX

SMP & MTs

BUKU SEKOLAH bse ELEKTRONIK

Masduki

Ichwan Budi Utomo

Matematika

Untuk SMP & MTs Kelas IX

PUSAT PERBUKUAN

Departemen Pendidikan Nasional

Masduki
Ichwan Budi Utomo

M A T E M A T I K A   I X

Untuk SMP dan MTs Kelas IX

Pusat Perbukuan
Departemen Pendidikan Nasional

MATEMATIKA IX

Untuk SMP dan MTs Kelas IX

Tim Penyusun

Penulis : Masduki.
Ichwan Budi Utomo.

Ukuran Buku : 21x 29,7 cm

510.07
MAS MASDUKI
m Matematika: untuk SMP & MTs kelas IX/
oleh Masduki dan Ichwan Budi Utomo. Pusat Perbukuan,
Departemen Pendidikan Nasional
ix, 190 hlm.: ilus.; 30 cm.
Grosarium: hlm.185
Bibliografi : hlm. 186
Indeks. Hlm. 187
ISBN 979-462-814-X

1. Matematika-Studi dan Pengajaran I. Judul
II. Utomo, Ichwan Budi

Diterbitkan oleh Pusat Perbukuan
Departemen Pendidikan Nasional
Tahun 2007

Diperbanyak oleh...

SAMBUTAN

Buku teks pelajaran ini merupakan salah satu dari buku teks pelajaran yang telah dilakukan penilaian oleh Badan Standar Nasional Pendidikan dan telah ditetapkan sebagai buku teks pelajaran yang memenuhi syarat kelayakan untuk digunakan dalam proses pembelajaran melalui peraturan Menteri Pendidikan Nasional nomor 46 tahun 2007.

Buku teks pelajaran ini telah dibeli hak ciptanya oleh Departemen Pendidikan Nasional pada tahun 2007. Saya menyampaikan penghargaan tinggi kepada penulis buku teks pelajaran ini, yang telah berkenan mengalihkan hak cipta karyanya kepada Departemen Pendidikan Nasional untuk digunakan secara luas oleh para pendidik dan peserta didik di seluruh Indonesia.

Buku-buku teks pelajaran yang telah dialihkan hak ciptanya kepada Departemen Pendidikan Nasional ini dapat diunduh (down load), digandakan, dicetak, dialih mediakan, atau difotokopi oleh masyarakat. Namun, untuk penggandaan yang bersifat komersial, harus memenuhi ketentuan yang ditetapkan oleh Pemerintah antara lain harga eceran tertinggi. Diharaqpkan buku teks pelajaran ini akan lebih mudah dijangkau masyarakat sehingga peserta didik dan pendidik di seluruh Indonesia dapat memperoleh sumber belajar yang bermutu.

Program pengalihan/pembelian hak cipta buku teks pelajaran ini merupakan suatu program terobosan yang ditempuh pemerintah melalui Departemen Pendidikan Nasional.

Kami berharap, semua pihak dapat mendukung kebijakan ini agar anak didik memperoleh kesempatan belajar dengan baik. Kepada para siswa, Kami menyampaikan selamat belajar, manfaatkan buku ini sebaik-baiknya. Kepada para guru, Kami menghimbau agar dapat memberdayakan buku ini seluas-luasnya bagi keperluan pembelajaran disekolah.

Akhir kata, saya menyampaikan Selamat Mereguk Ilmu Pengetahuan Melalui Buku Teks Pelajaran Bermutu.

Jakarta, 25 Pebruari 2008
Kepala Pusat Perbukuan

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT, karena berkat rahmat dan kuasa-Nya, penulis dapat menyelesaikan buku Matematika untuk SMP dan MTs Kelas IX. Buku ini disusun dengan menggunakan bahasa yang sederhana dan mudah dimengerti oleh siswa, serta menggunakan pendekatan kontekstual.

Pada setiap bab dilengkapi dengan pengantar, materi, kegiatan siswa, latihan soal, uji kompetensi, serta latihan semester. Pada pengantar diberikan ilustrasi kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan materi atau konsep yang akan dipelajari.

Materi disusun secara terstruktur, konsep disajikan dengan sederhana dan dilengkapi gambar pendukung, serta diberikan penerapan konsep pada kehidupan sehari-hari. Kegiatan siswa diberikan dengan tujuan agar siswa mampu mengkonstruksi sendiri pengetahuan atau konsep yang sedang dipelajari. Latihan diberikan agar siswa dapat menguji kemampuannya setelah akhir subbab. Selanjutnya, untuk mengetahui kemampuan penguasaan materi, siswa diberikan uji kompetensi pada akhir bab. Selain itu, untuk mempersiapkan siswa dalam mengikuti ulangan umum semester, diberikan juga latihan semester satu dan dua.

Meskipun buku ini sudah disusun dengan tujuan agar siswa dapat belajar aktif, namun keberhasilan pencapaian tujuan tersebut harus didukung pula oleh strategi guru dalam proses pembelajaran. Dengan menggunakan strategi pembelajaran matematika yang aktif, kreatif, dan inovatif diharapkan motivasi siswa dalam belajar matematika akan lebih meningkat.

Akhirnya penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu sehingga buku ini dapat diterbitkan. Semoga buku ini bermanfaat baik untuk siswa maupun para guru matematika sebagai salah satu referensi dalam proses pembelajaran matematika. Masukan dan saran dari para pengguna buku ini sangat kami nantikan.

Surakarta, September 2007

Penulis

PETUNJUK PENGGUNAAN BUKU

Agar kalian mudah membaca dan memahami buku ini, ikutilah petunjuk yang merupakan inti dari isi buku ini. Adapun isi buku ini terdiri atas beberapa bagian sebagai berikut.

Peta Konsep	→	Peta Konsep diberikan untuk memudahkan siswa mempelajari materi pada setiap bab.
Kata Kunci	→	Kata Kunci merupakan kata-kata penting yang merupakan inti pembahasan materi untuk memudahkan siswa memahami materi dalam setiap bab.
Tugas	→	Tugas disajikan untuk menguji kemampuan siswa dalam memahami materi yang telah diberikan.
Kegiatan	→	Kegiatan diberikan agar siswa membuktikan sendiri hal-hal yang harus diingat siswa.
Gambar	→	Gambar disajikan agar siswa lebih jelas dalam pemahaman isi buku selain itu gambar juga ditujukan agar menarik bagi pembaca.
Latihan	→	Latihan disajikan agar siswa dapat menguji kemampuan pada setiap akhir subbab.
Rangkuman	→	Rangkuman merupakan intisari dari materi yang disajikan. Rangkuman ini memudahkan siswa memahami isi materi.
Uji Kompetensi	→	Uji Kompetensi disajikan untuk menguji kemampuan siswa dalam memahami materi yang telah disajikan dalam setiap bab.
Latihan Semester	→	Latihan Semester disajikan pada setiap akhir semester untuk menguji kemampuan siswa dalam memahami materi yang telah diberikan selama satu semester.

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

Simbol	Keterangan	Halaman
	Kongruen	3, 4, 10, 11, 18
$\angle$	Sudut	4, 7, 12, 22, 24, 27
Δ	Segitiga	6, 18, 21, 24
$\sim$	Sebangun	6, 12, 21, 27
r	Jari-jari	40, 41, 42, 45, 46, 47, 50, 51, 52, 53, 55, 56, 57, 59, 60, 61
π	Phi ($\frac{22}{7}$ atau 3,14)	40, 41, 42, 45, 46, 47, 50, 51, 53, 55
t	Tinggi	41, 42, 45, 47, 51, 52, 55, 56, 59, 60
d	Diameter	42, 52, 53
V	Volume	42, 47, 55, 56, 57, 59, 60, 61
R	Range (jangkauan)	76
x_{max}	Data terbesar	76
x_{min}	Data terkecil	76
	x bar, rata-rata data	77, 78
Σ	Sigma, jumlah semua nilai data	77
f	Frekuensi	78
Me	Median, nilai tengah sekumpulan data	79, 80
f_k	Frekuensi kumulatif, jumlah frekuensi sebelum kelas median	80
L	tepi bawah kelas median	80

Simbol	Keterangan	Halaman
f_{Med}	Frekuensi kelas median	80
Mo	Modus, nilai data yang paling sering mucul	81
T_b	Tepi bawah kelas modus	81
c	Panjang interval kelas	80, 81
d_1	Selisih frekuensi kelas modus dengan kelas sebelumnya	81
d_2	Selisih frekuensi kelas modus dengan kelas sesudahnya	81
$\sqrt{}$	Akar bilangan	123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 131, 132, 133, 134, 135
S_n	Jumlan *n* suku barisan	153, 162, 165, 169, 172
U_n	Suku ke-*n*	156, 157, 159, 161, 164, 165, 168, 169, 170, 171, 172
b	Beda, selisih dua suku berurutan pada deret aritmatika	159, 160, 161, 163, 164, 165
b'	Beda baru barisan setelah disisipi	163
n'	Banyaknya suku setelah sisipan	163, 171
S_n'	Jumlan *n* suku pertama setelah sisipan	163, 171
U_t	Suku tengah	164, 170, 172
r	Rasio, perbandingan dua suku berurutan pada deret geometri	166, 168, 169, 172
r'	Rasio baru setelah sisipan	171

BAB I
KESEBANGUNAN BANGUN DATAR

Peta Konsep

Kesebangunan Bangun Datar

prasyarat

Kesebangunan Dua Bangun Datar

terdiri atas

Dua bangun datar kongruen

khususnya

Segitiga kongruen

Dua bangun datar sebangun

khususnya

Segitiga sebangun

mempunyai

Syarat

Sifat

Aplikasi

Kata Kunci
1. Segitiga
2. Sebangun
3. Kongruen

Sumber: www.wpfind.com
Gambar 1.1 Miniatur gedung menggunakan konsep kesebangunan

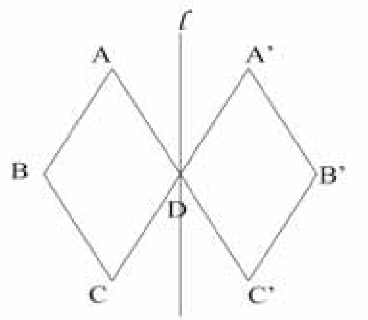
Perhatikan gambar di samping. Pernahkah kalian melihat miniatur gedung yang dibuat untuk melihat rencana bentuk asli gedung yang akan dibangun? Konsep apakah yang digunakan? Untuk memahaminya, ikutilah uraian pada materi berikut ini. Kalian diharapkan dapat mengidentifikasi bangun-bangun datar yang sebangun dan kongruen, sifat-sifat dua segitiga sebangun dan kongruen. Pada akhirnya, kalian dapat menggunakan konsep kesebangunan ini dalam memecahkan masalah sehari-hari.

A. Kesebangunan Dua Bangun Datar

Masih ingatkah kalian dengan bangun datar? Coba sebutkan bentuk bangun datar di sekitar kalian. Kita dapat menemukan bentuk-bentuk bangun datar dalam sebuah bangunan rumah. Misalnya jendela dan pintu berbentuk persegi panjang, lubang ventilasi berbentuk segitiga, dan ubin lantai berbentuk persegi. Disebut apakah bangun datar dengan bentuk dan ukuran yang sama? Bagaimana dengan syarat-syaratnya? Untuk lebih mengetahuinya, kita akan mempelajarinya pada bab Kesebangunan Bangun Datar ini.

1. Dua Bangun Datar yang Kongruen (Sama dan Sebangun)

Perhatikan gambar pencerminan bangun datar berikut.



Gambar 1.2

Gambar 1.2 Pencerminan belah ketupat ABCD oleh garis *l*

Belah ketupat ABCD dicerminkan terhadap garis lurus *l* sehingga terbentuk bayangan belah ketupat A'B'C'D. AB = A'B', BC = B'C', CD = C'D, DA = DA' dengan D tetap. Mengapa titik D tetap?

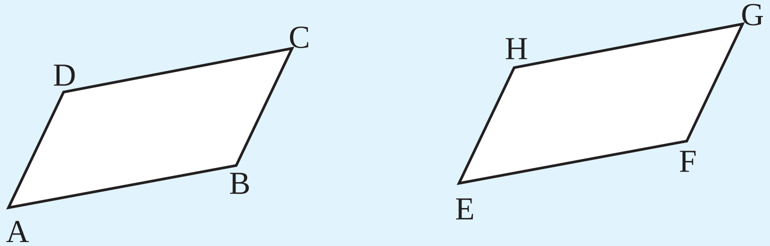
Belah ketupat ABCD dan A'B'C'D memiliki bentuk dan ukuran yang sama. Oleh sebab itu kedua bangun tersebut disebut **kongruen** atau sama dan sebangun.
Ditulis ABCD $\cong$ A'B'C'D.

Bangun datar dikatakan kongruen jika dan hanya jika bangun-bangun datar tersebut mempunyai bentuk dan ukuran yang sama.

Latihan 1.1

Ikuti langkah-langkah berikut ini.

1. Buatlah jajargenjang ABCD dan EFGH seperti pada gambar di bawah ini.



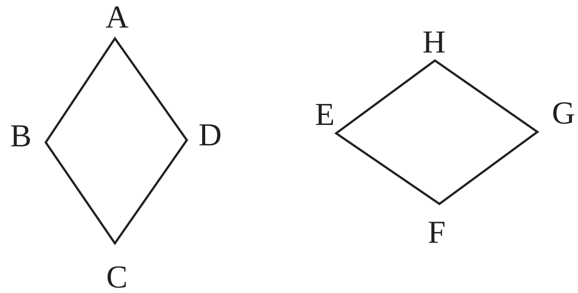
2. Guntinglah kedua gambar tersebut dengan mengikuti sisi-sisinya.
3. Tempelkan jajargenjang ABCD di atas jajargenjang EFGH sedemikian hingga menutup dengan sempurna jajargenjang EFGH.
4. Sekarang perhatikan masing-masing sisi dan sudut yang saling berhimpitan.
5. Diskusikan dengan dengan teman, apakah pada kedua bangun di atas terdapat pasangan sisi-sisi yang sama panjang dan sudut-sudut yang sama besar? Apakah kedua segitiga itu kongruen? Jelaskan alasanmu.

Nah, dari kegiatan di atas kita peroleh syarat dua bangun datar yang kongruen, yaitu:

1. Sudut-sudut yang bersesuaian (seletak) sama besar.
2. Sisi-sisi yang bersesuaian (seletak) sama panjang.

Contoh 1.1

1. Belah ketupat ABCD $\cong$ belah ketupat EFGH. Tentukan sudut-sudut yang seletak dan sisi-sisi yang sama panjang.



Penyelesaian:

Diketahui: ABCD $\cong$ EFGH

Sudut-sudut yang sama besar:

$\angle A = \angle E$ $\quad\quad$ $\angle C = \angle G$

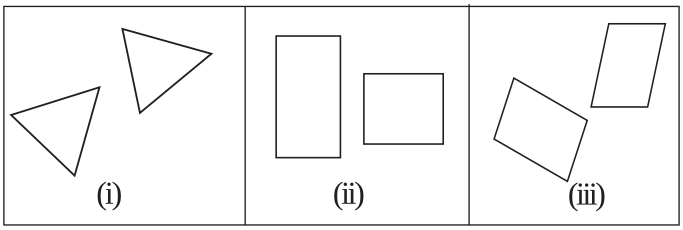
$\angle B = \angle F$ $\quad\quad$ $\angle D = \angle H$

Sisi-sisi yang sama panjang:

AB = EF $\quad\quad$ CD = GH

BC = FG $\quad\quad$ DA = HE

2. Apakah pasangan bangun berikut kongruen? Berikan alasan kalian.



Penyelesaian:

Gambar (i) kongruen, sebab mempunyai sudut-sudut bersesuaian sama besar dan sisi-sisi bersesuaian sama panjang.

Gambar (ii) tidak kongruen, sebab sisi-sisi yang bersesuaian tidak sama panjang.

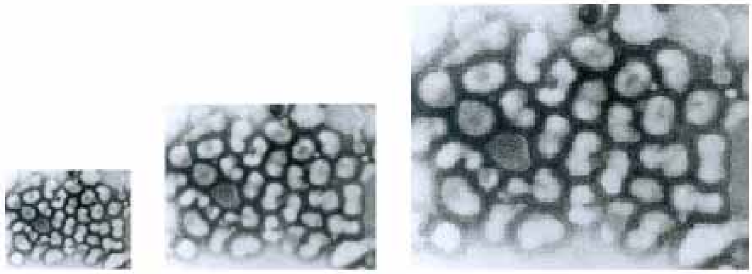
Gambar (iii) kongruen, sebab mempunyai sudut-sudut bersesuaian sama besar dan sisi-sisi bersesuaian sama panjang.

Latihan 1.2

1. Tentukan pasangan bangun berikut kongruen atau tidak, dan tentukan alasannya.
   a. Dua buah persegi
   b. Sepasang segitiga sama sisi
   c. Sepasang segitiga sama kaki
   d. Sepasang lingkaran
   e. Sepasang persegi panjang
2. Diberikan segitiga siku-siku dengan ukuran sisi siku-siku berikut ini. Berikan kesimpulan kalian.
   a. 6 cm dan 8 cm serta 3 cm dan 5 cm
   b. 9 cm dan 15 cm serta 24 cm dan 18 cm.

2. Dua Bangun Datar yang Sebangun

Pernahkah kalian melakukan pengamatan dengan menggunakan mikroskop? Pada pembesaran tertentu, kita dapat mengamati benda-benda yang sangat kecil ukurannya. Pengamatan tersebut dapat kita ilustrasikan sebagai berikut.

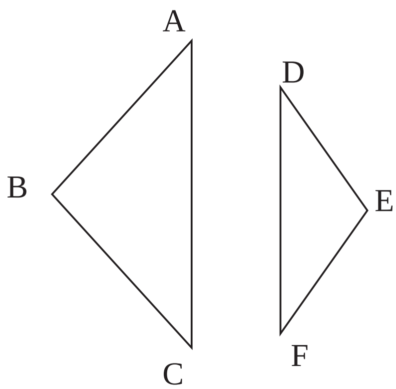


Sumber: upload.wikimedia.org

Gambar 1.3 Objek yang sama dengan ukuran berbeda

Dari gambar di atas, kita dapat melihat benda dengan bentuk sama tetapi ukuran yang berbeda. Perbedaan ukuran terjadi melalui pembesaran atau pengecilan objek dengan menggunakan perbandingan skala tertentu. Ketiga gambar tersebut dikatakan sebangun sebab perbandingan tiap sisinya sama.

Perhatikan gambar bangun datar berikut.



Gambar 1.4 ΔABC dan ΔDEF sebanding

Δ ABC dan Δ DEF mempunyai bentuk yang sama, ukuran yang berbeda, tetapi sudut-sudut yang bersesuaian (seletak) sama besar dan sisi-sisi yang bersesuaian (seletak) sebanding.

Dalam hal ini ditulis **Δ ABC ~ Δ DEF.**

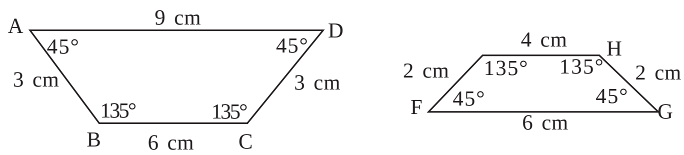
Dari gambar tersebut tampak bahwa dua bangun datar yang sebangun selalu memenuhi syarat:

a. Sudut-sudut yang bersesuaian (seletak) sama besar.
b. Sisi-sisi yang bersesuaian (seletak) sebanding.

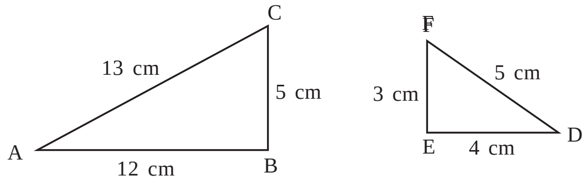
Contoh 1.2

Dari pasangan bangun datar berikut, manakah yang sebangun dan mana yang tidak sebangun? Mengapa demikian?

1.



2.



Penyelesaian:

1. Akan diselidiki apakah trapesium ABCD dan EFGH sebangun.

   $\angle A = \angle F = 45^o$ $\quad$ $\angle C = \angle H = 45^o$

   $\angle B = \angle E = 135^o$ $\quad$ $\angle D = \angle G = 135^o$

   Ternyata sudut - sudut yang bersesuaian sama besar.

   $\frac{AB}{EF} = \frac{3}{2}$ $\quad$ $\frac{CD}{GH} = \frac{3}{2}$

   $\frac{BC}{EH} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ $\quad$ $\frac{AD}{FG} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

   Ternyata sisi-sisi yang bersesuaian sebanding.

   Jadi gambar pada nomor 1 merupakan pasangan bangun datar yang sebangun.

2. Akan diselidiki apakah segitiga ABC dan segitiga DEF sebangun.

   $\angle A \neq \angle D$

   $\angle B = \angle E = 90^o$

   $\angle C \neq \angle F$

Ternyata sudut-sudut yang bersesuaian tidak semuanya sama besar.

$$\frac{AB}{DE} = \frac{12}{4} = 3$$

$$\frac{BC}{EF} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{AC}{DF} = \frac{13}{5}$$

Ternyata sisi-sisi yang bersesuaian tidak sebanding.

Jadi gambar nomor 2 merupakan pasangan bangun datar yang tidak sebangun.

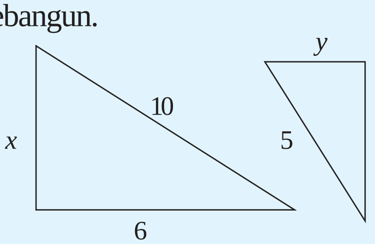
Tugas 1.1

Pernahkah kalian menggunakan pantograf dalam menggambar? Bagaimana hasil gambar dengan menggunakan pantograf dengan ukuran berbeda? Apakah sebangun? Mengapa demikian?

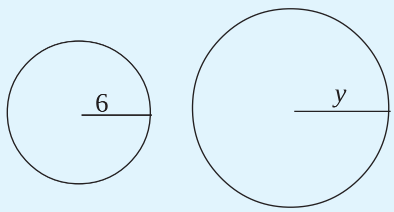
Latihan 1.3

1. Tentukan *x* dan *y* dari gambar bangun berikut agar kedua bangun tersebut sebangun.

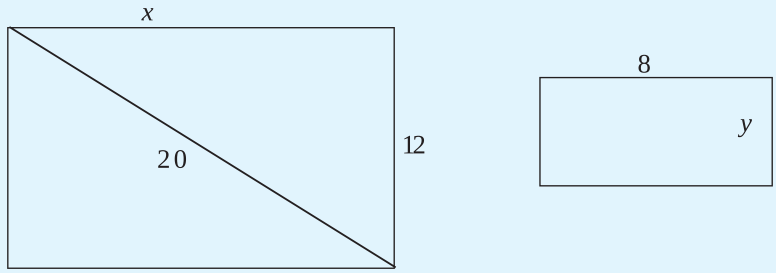
a.



c.



b.



2. Tinggi menara 3 m. Dina berdiri sejauh 3,75 m dari menara. Di antaranya, sejauh 1,25 m dari menara terdapat tongkat yang ditegakkan. Ujung tongkat, menara, dan Dina, terletak pada satu garis lurus. Berapakah panjang tongkat tersebut?

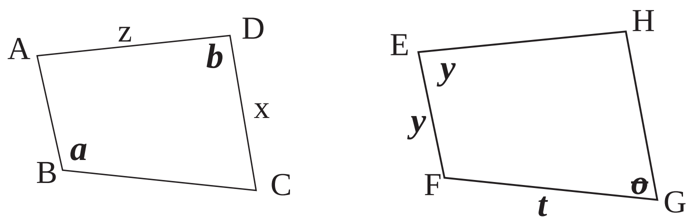
3. Menghitung Panjang Sisi dan Besar Sudut Dua Bangun Datar

a. *Panjang Sisi dan Besar Sudut Dua Bangun Datar Kongruen*

Mari kita ingat kembali syarat dua bangun datar yang kongruen. Dua bangun datar dikatakan kongruen jika dan hanya jika memenuhi:

1) Sudut-sudut yang bersesuaian (seletak) sama besar.
2) Sisi-sisi yang bersesuaian (seletak) sama panjang.

Jika kita mempunyai dua bangun datar yang kongruen seperti di bawah ini,



Gambar 1.5 Segi empat ABCD dan EFGH kongruen

Maka unsur-unsur yang belum diketahui besar dan panjangnya dapat dicari dengan memperhatikan syarat kekongruenan dua bangun datar.

1) *Sudut-sudut yang bersesuaian sama besar*

Diketahui besar $\angle$ B = α, $\angle$ D = β, $\angle$ E = γ, $\angle$ G = θ.

Karena ABCD $\cong$ EFGH maka besar $\angle$ A, $\angle$ C, $\angle$ F, dan $\angle$ H dapat dicari sebagai berikut.

$\angle A = \angle E \quad \rightarrow \quad \angle A = \angle E = \gamma$

$\angle B = \angle F \quad \rightarrow \quad \angle F = \angle B = \alpha$

$\angle C = \angle G \quad \rightarrow \quad \angle C = \angle G = \theta$

$\angle D = \angle H \quad \rightarrow \quad \angle H = \angle D = \beta$

2) *Sisi-sisi yang bersesuaian sama panjang*

Diketahui panjang AD = *z*, CD = x, EF = *y*, FG = *t*.

Karena ABCD $\cong$ EFGH maka panjang AB, BC, GH, dan EH dapat dicari sebagai berikut.

AB = EF $\rightarrow$ AB = EF = *y*

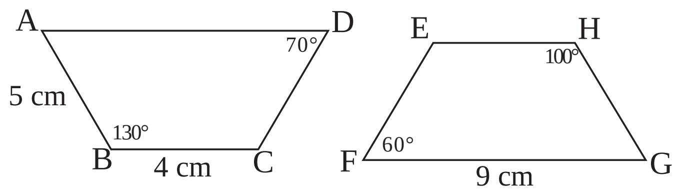
BC = FG $\rightarrow$ FG = BC = *t*

CD = GH $\rightarrow$ GH = CD = *x*

AD = EH $\rightarrow$ EH = AD = *z*

Contoh 1.3

1. Perhatikan bahwa trapesium ABCD $\cong$ EFGH.



Tentukan panjang dan besar unsur-unsur yang belum diketahui.

Penyelesaian:

Karena trapesium ABCD EF $\cong$ GH, maka berlaku hubungan sisi-sisi yang bersesuaian sama panjang.

AB = CD = EF = GH = 5 cm

EH = BC = 4 cm

AD = FG = 9 cm

Demikian juga, karena trapesium ABCD EFGH, maka berlaku hubungan sudut-sudut yang bersesuaian sama besar.

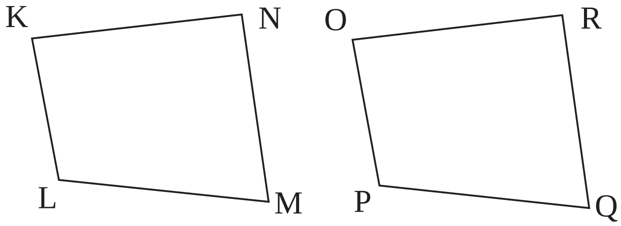
$\angle$ A = $\angle$ F = 60^o

$\angle$ B = $\angle$ E = 130^o

$\angle$ C = $\angle$ H = 100^o

$\angle$ D = $\angle$ G = 70^o

2. Diberikan segi empat KLMN $\cong$ OPQR



Diketahui perbandingan panjang sisi-sisi pada segi empat KLMN, KL : LM : MN : KN = 2 : 5 : 6 : 3. Panjang sisi MN = 9 cm. Berapakah panjang OP dan QR?

Penyelesaian:

Karena KLMN $\cong$ OPQR maka berlaku hubungan sisi-sisi yang bersesuaian sama panjang.

OP = KL.

Karena $\frac{KL}{MN} = \frac{2}{6}$ maka berlaku . $\frac{KL}{MN} = \frac{2}{6}$ MN

Diketahui panjang MN = 9 cm maka panjang .

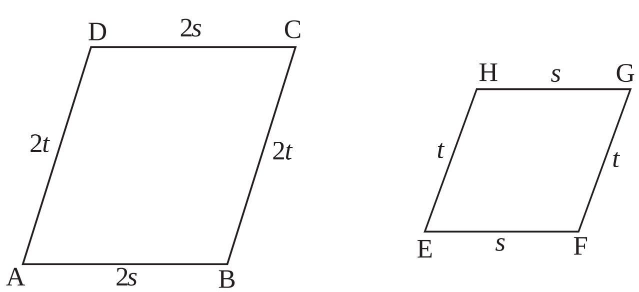
KL = $\frac{2}{6}$ x 9 cm =3 cm

Berarti panjang OP = KL = 3 cm.

QR = MN = 9 cm.

b. *Panjang Sisi dan Besar Sudut Dua Bangun Datar Sebangun*

Perhatikan gambar berikut.



Gambar 1.6 Dua bangun yang sebangun

Apa yang dapat kalian simpulkan dari kedua gambar tersebut? Apakah kedua gambar tersebut sebangun?

Ternyata kedua bangun tersebut memenuhi syarat kesebangunan dua bangun datar atau ABCD $\sim$ EFGH, sehingga dipenuhi:

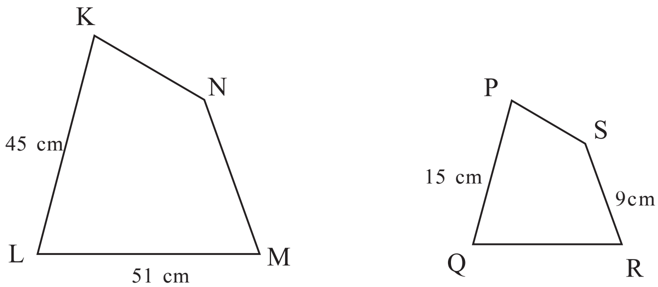
1) $\angle A = \angle E$, $\angle B = \angle F$, $\angle C = \angle G$, dan $\angle D = \angle H$.

2) $\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{AD}{EH} = k$

Pada gambar di atas nilai faktor skala $k = 2$.

Contoh 1.4

Perhatikan gambar berikut.



Diberikan segi empat KLMN dan segi empat PQRS, dengan KLMN $\sim$ PQRS. Hitunglah:

a. faktor skala k.

b. panjang QR dan MN.

Penyelesaian:

a. Karena KLM $\sim$ PQRS maka kedua bangun tersebut mempunyai hubungan sisi-sisi yang bersesuaian sebanding.

Berarti , $\frac{KL}{PQ} = k$ dengan k faktor skala.

Diketahui KL = 45 cm dan PQ = 15 cm, artinya

$$\frac{KL}{PQ} = \frac{45 \text{ cm}}{15 \text{ cm}} = 3$$

Jadi faktor skala $k = 3$.

b. QR bersesuaian dengan LM. Karena dua bangun tersebut mempunyai faktor skala $k = 3$, maka. $\frac{LM}{QR} = 3$

Berarti . $QR \frac{LM}{3} = \frac{51 \text{ cm}}{3} = 17 \text{ cm}$

MN bersesuaian dengan RS. Karena dua bangun tersebut mempunyai faktor skala $k = 3$, maka. $\frac{LM}{RS} = 3$ Berarti MN = 3RS = 3 × 9 cm = 27 cm.

B. Segitiga-segitiga Kongruen

1. Syarat Dua Segitiga yang Kongruen

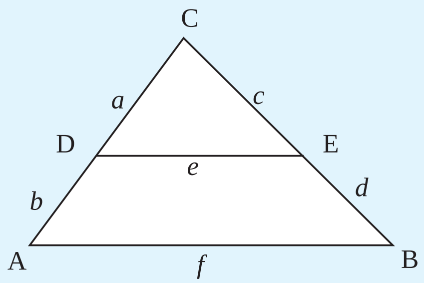
Tentunya kalian masih ingat tentang syarat dua bangun datar yang kongruen. Coba sebutkan.

Lebih lanjut, kita akan mengaplikasikannya pada salah satu bangun datar yaitu segitiga. Sekarang coba katakan, apa yang disebut dengan segitiga itu? Bisakah kalian sebutkan benda-benda di sekitar kita yang berbentuk segitiga?

Segitiga terangkai dari enam unsur yang terdiri dari tiga sisi dan tiga sudut.

Tugas 1.2

1. Dalam Δ KLM dan Δ XYZ, diketahui KL = 10 cm, LM = 16 cm, KM = 12 cm, YZ = 24 cm, XY = 15 cm, dan YZ = 18 cm. Mengapa kedua segitiga itu sebangun? Sebutkan pasangan-pasangan sudut yang sama besar.
2. Diketahui Δ KLM dan Δ XYZ dengan ∠ K = ∠ Z, ∠ M = ∠ Y, KL = 10 cm, KM = 12 cm, XZ = 15 cm dan XY = 24 cm.
   a. Gambarlah kedua segitiga itu. Apakah keduanya sebangun?
   b. Tulis perbandingan sisi-sisi yang bersesuaian.
   c. Carilah panjang sisi ML dan YZ.

3. 

Perhatikan gambar di samping. Ada dua segitiga yang sebangun yaitu Δ CDE dan Δ ABC.

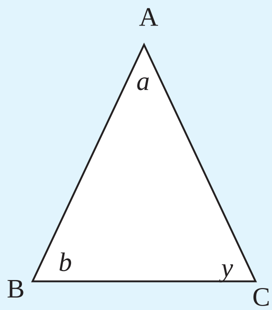
a. Sebutkan sudut-sudut yang sama besar.

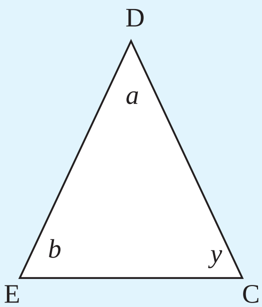
b. Tentukan perbandingan sisi-sisi yang bersesuaian.

4. Gambar sebuah rumah diketahui tinggi pintu 3,5 cm, sedangkan tinggi pintu sebenarnya adalah 2,1 m. Berapakah skala pada gambar tersebut?

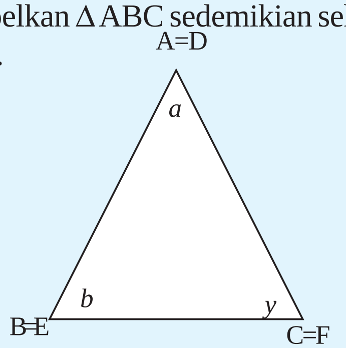
Kegiatan 1.1

1. Gambarlah Δ ABC dan Δ DEF seperti di bawah ini, dengan AB = DE, BC = EF, dan AC = DF.





2. Gunting kedua segitiga tersebut dengan mengikuti sisi-sisinya.
3. Selanjutnya tempelkan Δ ABC sedemikian sehingga menutup dengan sempurna Δ DEF.



4. Dengan memperhatikan langkah di atas, coba kalian tuliskan sisi-sisi dan sudut-sudut mana saja yang saling berhimpitan.

Dari kegiatan yang kalian lakukan sebelumnya, apakah kedua segitiga tersebut kongruen? Mengapa demikian?

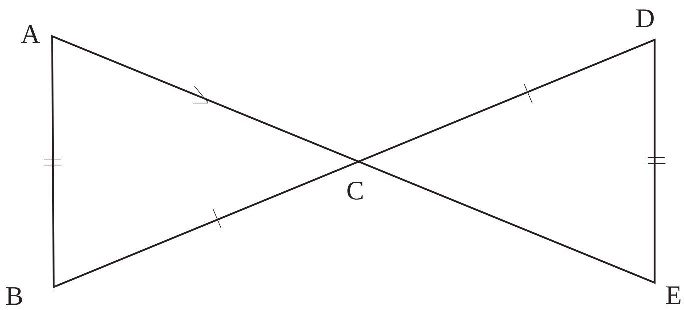
Selanjutnya, dapat kita simpulkan bahwa dua segitiga, dikatakan kongruen jika dan hanya jika keduanya mempunyai bentuk dan ukuran yang sama. Jika demikian, unsur-unsur yang seletak saling menutup dengan sempurna.

Jadi syarat dua segitiga yang kongruen adalah:

a. Sudut-sudut yang bersesuaian (seletak) sama besar.
b. Sisi-sisi yang bersesuaian (seletak) sama panjang.

Contoh 1.5

Tulislah sudut-sudut dan sisi-sisi yang seletak pada bangun dua segitiga berikut ini. Kemudian apa kesimpulanmu?



Penyelesaian:

Sudut-sudut yang seletak:

$\angle A = \angle E$

$\angle B = \angle D$

$\angle ACB = \angle ECD$

Sisi-sisi yang seletak:

AB = ED

BC = DC

AC = EC

Karena bangun di atas memenuhi sifat kekongruenan, maka pasangan bangun tersebut kongruen.

2. Sifat Dua Segitiga yang Kongruen

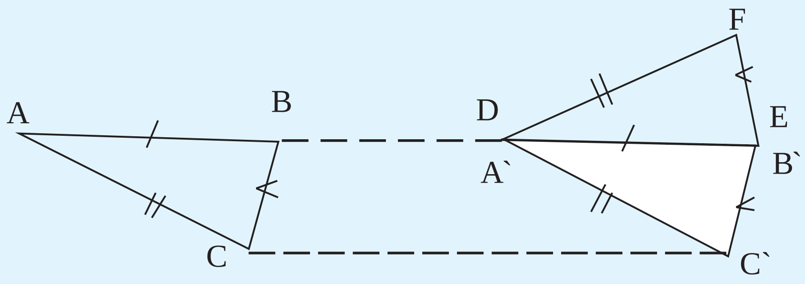
Dua segitiga kongruen dapat ditentukan dari ketiga sisi dan sudutnya.

a. Tiga Sisi (S - S - S)

Jika dua buah segitiga adalah kongruen maka ketiga sisi segitiga pertama sama panjang dengan ketiga sisi segitiga kedua (sisi-sisi seletak).

Kegiatan 1.2

1. Gambarlah Δ ABC dan Δ DEF dengan panjang AB = DE, BC = EF, dan AC = DF seperti pada gambar berikut.
2. Perpanjang sisi AB dan ED hingga berimpit, kemudian beri nama perpanjangan garis dengan *l*
3. Geser Δ ABC sejauh BE sehingga didapat Δ A'B'C' dengan A' pada D dan B' pada E.
4. Diperoleh layang-layang DFEC' dengan DE sumbu simetri layang-layang.



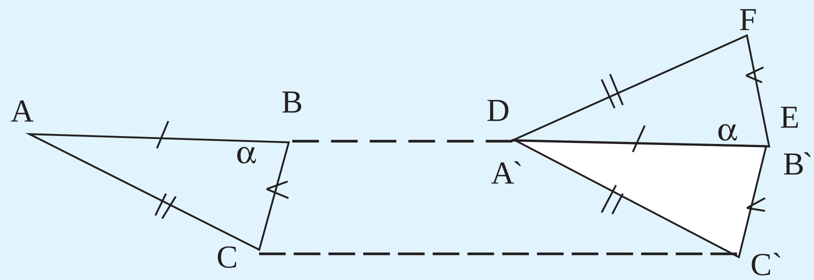
Dengan demikian, Δ ABC dan Δ DEF kongruen.

b. Dua Sisi dan Satu Sudut Apit (S - Sd - S)

Dua segitiga yang kongruen maka dua sisi segitiga pertama sama dengan dua sisi segitiga kedua, dan sudut yang diapitnya sama besar.

Kegiatan 1.3

1. Gambarlah Δ ABC dan Δ DEF dengan panjang AB = DE, BC = EF dan $\angle$ B = $\angle$ E seperti pada gambar berikut.
2. Geserlah Δ ABC sejauh BE sehingga diperoleh Δ A'B'C' dimana titik A' pada D dan titik B' pada E.
3. Diperoleh layang-layang DFEC' dengan DE sebagai sumbu simetri.



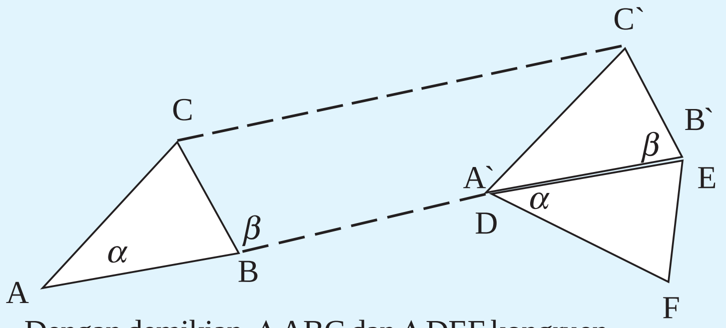
Dengan demikian, Δ ABC dan Δ DEF kongruen.

c. Dua Sudut dan Satu Sisi (Sd - S - Sd)

Dua segitiga yang kongruen maka dua buah sudut dari segitiga pertama sama dengan dua sudut pada segitiga kedua, dan sisi di antara kedua sudut tersebut sama panjang.

Kegiatan 1.4

1. Gambarlah Δ ABC dan Δ DEF dengan besar $\angle$ A = $\angle$ D, besar $\angle$ E = $\angle$ F, dan panjang AB = DE, lihat gambar.
2. Geserlah Δ ABC sejauh BE sehingga didapat Δ A'B'C' dengan titik A' pada D dan titik B' pada E.
3. Diperoleh bangun layang-layang DFEC' dengan DE sumbu simetri layang-layang.



Dengan demikian, Δ ABC dan Δ DEF kongruen.

3. Perbandingan Sisi-sisi Dua Segitiga Kongruen

Jika dua buah segitiga kongruen, maka sisi-sisi yang berada di depan sudut yang sama besar mempunyai panjang sama. Perbandingan sisi-sisi segitiga pertama sama dengan perbandingan sisi-sisi segitiga yang kedua.

Misalkan

Diberikan: Δ KLM $\cong$ Δ PQR dengan sifat (s-sd-s)

Diketahui: KM = PR, K = P, KL = PQ

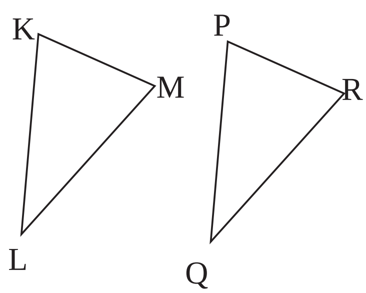
Akibatnya LM = QR

$\angle$L = $\angle$Q

$\angle$M = $\angle$R

Contoh 1.6

Perhatikan gambar di bawah ini.



Δ KLM Δ PQR, dengan perbandingan sisi-sisi pada Δ PQR adalah PQ : QR : PR = 5 : 4 : 3. Jika PQ = 25 cm,

Hitunglah:

a. perbandingan sisi-sisi yang bersesuaian,

b. panjang KL, KM, dan LM.

Penyelesaian:

a. Δ PQR $\cong$ Δ KLM

PQ : QR : PR = KL : LM : KM = 5: 3 : 4

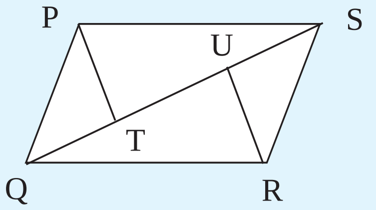
b. KL = PQ KM = PR LM = QR

= 25 cm = ×25 = × 25

= 15 cm = 20 cm

Latihan 1.4

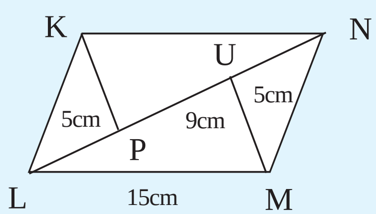
1. Gambarlah jajargenjang PQRS dengan RU dan PT tegak lurus terhadap diagonal QS. Buktikan bahwa:



a. Δ SRU $\cong$ Δ QPT,

b. Δ RQU $\cong$ Δ PST.

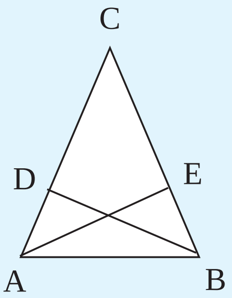
2. Pada jajargenjang PQRS dibuat diagonal PR. Titik T dan U terletak pada PR sehingga PT = RU. Buktikan bahwa:
   a. Δ PTS $\cong$ Δ QRU,
   b. Δ PQU $\cong$ Δ RST.
3. Perhatikan gambar di bawah ini.



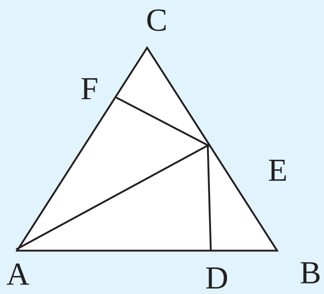
a. Buktikan bahwa:
Δ KPN $\cong$ Δ MQL.

b. Tentukan perbandingan
KM : KP : PM.

4. Diketahui persegi ABCD panjang sisi 8 cm. Titik Q terletak di dalam persegi sehingga Δ ABQ dengan sama kaki dan $\angle$ QAB = 150°. Hitunglah panjang QC.

5. 

Δ ABC adalah segitiga sama kaki dengan AC = BC. Pada segitiga tersebut ditarik garis-garis tinggi AE dan BD. Jika diketahui CE = 12 cm dan AC = 20 cm. Hitunglah panjang CD dan BD.

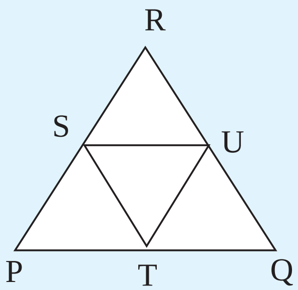
6. 

Perhatikan gambar di samping.

a. Tunjukkan bahwa Δ AEF $\cong$ Δ AED.

b. Berapa panjang AD, AF, dan EF?

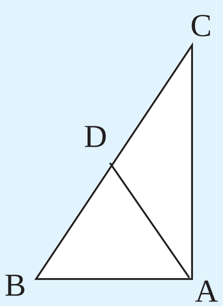
7. Titik-titik S, T, dan U terletak di tengah-tengah sisi Δ PQR.



a. Sebutkan segitiga-segitiga yang kongruen.

b. Sebutkan pasangan segitiga yang sebangun tapi tidak kongruen.

8. Dari gambar di bawah ini diketahui panjang CD = 16 cm dan panjang AD = 12 cm. Tentukan:



a. panjang BA,

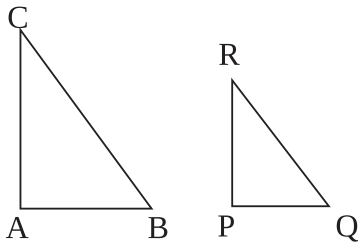
b. panjang DC,

c. panjang BD.

9. Kios yang tingginya 3 m pada suatu foto tampak setinggi 5,4 cm dan lebar 7,2 cm. Tentukan lebar kios sebenarnya.
10. Tinggi Pak Ali 175 cm. Pada suatu siang Pak Ali berdiri di halaman. Karena sinar matahari, bayangan Pak Ali 12 cm. Jika di samping Pak Ali ada tongkat yang panjangnya 23 cm, berapakah panjang bayangan tongkat tersebut?

1. Syarat Dua Segitiga yang Sebangun

Perhatikan gambar berikut ini.



Gambar 1.7 Δ ABC : Δ PQR

Δ ABC ~ Δ PQR sehingga berlaku pula syarat kesebangunan, yaitu:

a. Sudut-sudut yang seletak sama besar.
b. Sisi-sisi yang seletak sebanding proporsional.

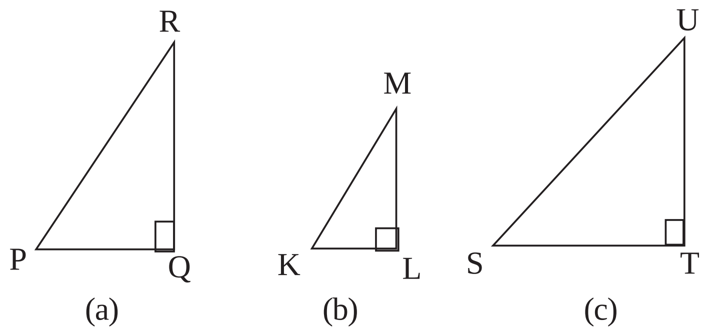
Sehingga jika Δ ABC ~ Δ PQR, maka dipenuhi:

a. $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$, dan $\angle C = \angle R$

b. $\dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{AC}{PR}$

Contoh 1.7

Diketahui tiga buah segitiga Δ PQR, Δ KLM, dan Δ STU. Coba selidiki pasangan segitiga manakah sebangun dan mana yang tidak sebangun?



Diketahui bahwa $\angle P = 60^o$, $\angle M = 30^o$, dan $\angle U = 40^o$ serta panjang PR = 6 cm, KM = 3 cm, PQ = 4 cm, KL = 2 cm, SU = 9 cm, dan ST = 3 cm.

Penyelesaian:

Kita akan selidiki apakah Δ PQR ~ Δ KLM.

$\angle R = 180^o - (\angle P + \angle Q) = 180^o - (60^o + 90^o) = 30^o$

$\angle K = 180^o - (\angle M + \angle L) = 180^o - (30^o + 90^o) = 60^o$

Jadi $\angle P = \angle K$, $\angle Q = \angle L$, dan $\angle R = \angle M$.

Selanjutnya kita selidiki perbandingan sisi yang seletak.

$\frac{PR}{KM} = \frac{6\text{ cm}}{3\text{ cm}} = 2$ $\qquad$ $\frac{PQ}{KL} = \frac{4\text{ cm}}{2\text{ cm}} = 2$

Jadi . $\frac{PR}{KM} = \frac{PQ}{KL} = \frac{QR}{LM} = 2$

2 Dengan demikian Δ PQR ~ Δ KLM.

Selanjutnya akan kita selidiki apakah Δ PQR ~ Δ STU.

$\angle S = 180^o - (\angle U + \angle T) = 180^o - (40^o + 90^o) = 50^o$

Jadi $\angle P \neq \angle S$, $\angle Q = \angle T$, dan $\angle U \neq \angle M$.

Selanjutnya kita selidiki perbandingan sisi yang seletak.

$\frac{PR}{KM} = \frac{6\text{ cm}}{9\text{ cm}} = \frac{2}{3} \neq \frac{PQ}{ST} = \frac{4\text{ cm}}{3\text{ cm}}$

Dengan demikian Δ PQR tidak sebangun dengan Δ STU.

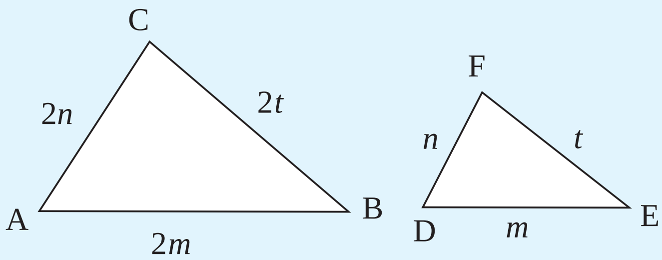
2. Sifat Dua Segitiga yang Sebangun

a. Sisi-sisi yang Bersesuaian Sebanding

Untuk lebih memahami sifat-sifat dua segitiga yang sebangun, mari kita lakukan kegiatan berikut ini.

Kegiatan 1.5

1. Gambarlah dua segitiga, Δ ABC dan Δ DEF, dengan panjang AB =2DE, BC = 2EF dan AC =2DF. Perhatikan gambar berikut.



2. Dengan menggunakan busur derajat ukurlah besar sudut-sudut kedua segitiga tersebut. Kemudian salin dan lengkapilah tabel berikut.

Perbandingan Dua Sisi Bersesuaian	**Sudut yang Sama Besar**
$\frac{AB}{DE}$ = ...	$\angle$ A = ...
$\frac{BC}{EF}$ = ...	$\angle$ B = ...
$\frac{AC}{DF}$ = ...	$\angle$ C = ...

3. Buatlah kesimpulan dengan melihat tabel tersebut dan memahami syarat kesebangunan dua bangun datar.

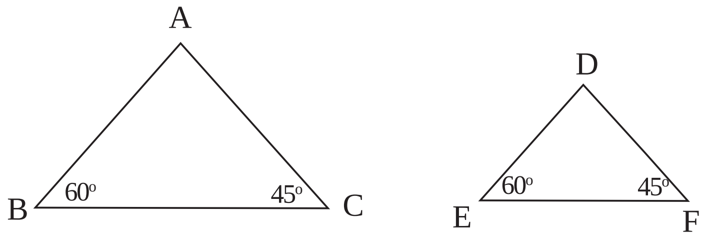
Dari kegiatan tersebut, ternyata pada dua buah segitiga yang sebangun memiliki tiga pasang sisi-sisi yang seletak dengan perbandingan yang sama atau faktor skala *k*.

Kesimpulan:

Pada dua segitiga yang sebangun, sisi-sisi yang bersesuaian sebanding atau sisi-sisi-sisi (S-S-S)

b. Sudut-sudut yang Seletak Sama Besar (Sd-Sd-Sd)

Masih ingatkah kalian cara menggambar sudut-sudut istimewa? Sekarang, gambarlah Δ ABC dengan besar $\angle A = 60^o$ dan $\angle C = 45^o$. Perhatikan gambar berikut.



Gambar 1.8 Dua segitiga sebangun yang memenuhi sd-sd-sd

Kegiatan 1.6

1. Dengan faktor skala $k =$ dari Δ ABC tersebut, gambarlah Δ DEF.
2. Dengan menggunakan penggaris, ukurlah panjang sisi-sisi segitiga tersebut dan isilah perbandingannya dengan melengkapi titik-titik di bawah ini.
   AB : DE = ... : .... = ... : ....
   BC : EF = ... : .... = ... : ....
   AC : DF = ... : .... = ... : ....
3. Dengan menggunakan busur, ukurlah besar sudut $\angle A$ dan $\angle D$, apakah keduanya sama besar?
4. Buatlah kesimpulan dari kegiatan di atas dengan mengingat kembali syarat kesebangunan.

Ternyata dari kegiatan tersebut kita dapat mengetahui bahwa sudut-sudut yang bersesuaian memiliki besar yang sama dan ketiga sisi yang bersesuaian sebanding. Artinya kedua segitiga itu sebangun.

Jadi,

Pada dua segitiga yang sebangun maka ada dua buah sudut yang bersesuaian sama besar

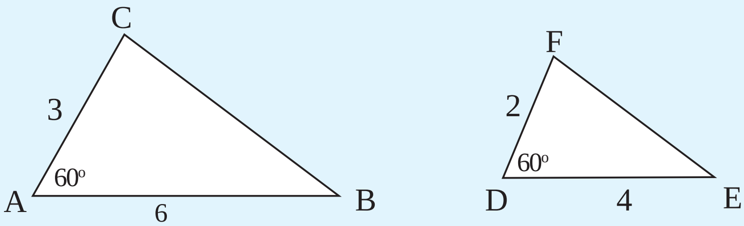
c. *Satu Sudut Sama Besar dan Kedua Sisi yang Mengapitnya Sebanding (S-Sd-S)*

Selain dua sifat segitiga di atas, kita dapat menentukan sifat ketiga yaitu jika salah satu sudutnya sama besar dan kedua sisi yang mengapitnya sebanding, maka kedua segitiga itu sebangun. Untuk memahaminya lakukanlah kegiatan berikut.

Kegiatan 1.7

Ikuti langkah-langkah berikut.

1. Gambarlah dua buah segitiga seperti di bawah ini.



2. Dengan menggunakan busur derajat, ukurlah besar $\angle A$, $\angle C$, $\angle D$, dan $\angle F$. Dengan penggaris, ukurlah panjang AC dan DF.
3. Kemudian lengkapi pernyataan di bawah ini.

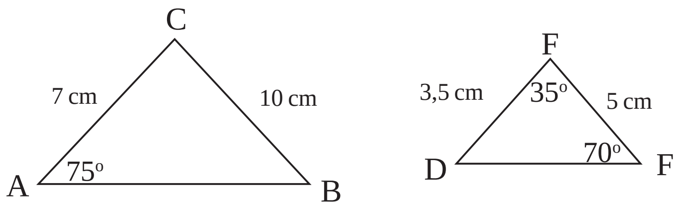
Perbandingan Dua Sisi Bersesuaian	Sudut yang Sama Besar
$\frac{AB}{DE} = ...$	$\angle A =$ ....
$\frac{BC}{EF} = ...$	$\angle B =$ ....
$\frac{AC}{DF} = ...$	$\angle C =$ ....

4. Dari tabel tersebut, selanjutnya buat kesimpulan tentang kedua segitiga tersebut. Dengan mengingat kembali syarat kesebangunan, tentukan apakah segitiga-segitiga itu sebangun atau tidak.

Pada dua segitiga yang sebanding terdapat satu sudut yang sama besar dengan kedua sisi yang mengapitnya sebanding.

Contoh 1.8

Perhatikan gambar berikut.



Buktikan kedua segitiga tersebut sebangun.

Penyelesaian:

Perhatikan Δ DEF.

Diketahui $\angle E = 70^o$ dan $\angle F = 35^o$

maka $\angle D = 180 - (70^o + 35^o) = 75^o$.

Sedangkan pada Δ ABC diketahui $\angle A = 75^o$.

Karena $\angle A$ dan $\angle D$ seletak dan $\angle A = \angle D$ maka dipenuhi satu sudut yang seletak sama besar.

Perhatikan perbandingan sisi-sisi Δ ABC dan Δ DEF.

$$\left.\begin{aligned} \frac{AB}{DE} &= \frac{75}{3,5} = 2 \\ \frac{AC}{DF} &= \frac{10}{5} = 2 \end{aligned}\right\}$$

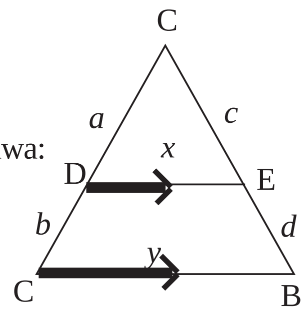
Mempunyai faktor skala sama yaitu 2. Berarti ada dua pasang sisi yang sebanding.

Jadi dipenuhi sifat sisi-sudut-sisi sehingga Δ ABC ~ Δ DEF.

3. Perbandingan Sisi-sisi Dua Segitiga Sebangun

Sisi-sisi yang bersesuaian pada dua segitiga yang sebangun adalah sebanding. Oleh karena itu jika diketahui faktor skala perbandingannya maka kita dapat mencari panjang sisi-sisi segitiga yang belum diketahui.

Perhatikan gambar berikut.



Δ ABC ~ Δ CDE

Dari gambar tersebut kita ketahui bahwa:

$\angle$ DCE = $\angle$ ACB (berimpitan)

$\angle$ CDE = $\angle$ CAB (sehadap)

$\angle$ CED = $\angle$ CBA (sehadap)

Jadi ketiga sudut yang bersesuaian sama besar.

Perhatikan perbandingan sisi-sisi yang seletak. Kita peroleh AC = AD + DC dan BC = BE + EC.

Dengan sifat kesebangunan, maka sisi-sisi yang seletak sebanding.

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

$$\frac{AD}{AD + AB} = \frac{AE}{AC + EC} = \frac{DE}{BC}$$

$$\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} = \frac{x}{y}$$

$$\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$$

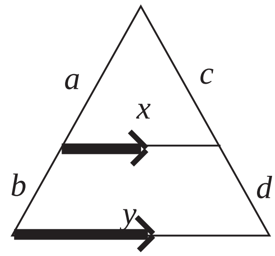
$$\begin{aligned} a\,(c + d) &= c\,(a + b) \\ ac + ad &= ca + cb \\ ac + ad - ac &= ac + bc - ac \\ ad &= bc \end{aligned}$$

$$\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Jadi diperoleh:

$$\boxed{\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} = \frac{x}{y}}$$



dan

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$$

Contoh 1.9

Perhatikan gambar di samping.

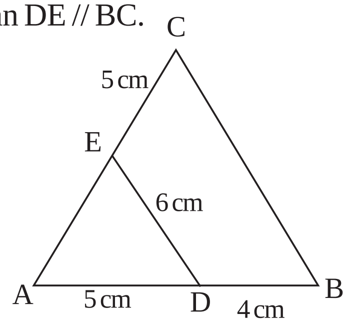
Diketahui Δ ABC ~ Δ ADE dengan DE // BC.

Hitunglah:

a. panjang AE,

b. panjang AC,

c. panjang BC.



Penyelesaian:

a. Kita gunakan perbandingan sisi seletak pada segitiga sebangun. Kita gunakan perbandingan:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

$$\frac{5}{4} = \frac{AE}{5}$$

$$4 \times AE = 5 \times 5$$

$$AE =$$

Jadi panjang AE = 6,25 cm.

b. AC = AE + EC
= 6,25 +5 = 11,25 cm

Jadi panjang AC = 11,25 cm.

c. $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{DE}{BC}$

$\dfrac{AD}{AB + DB} = \dfrac{DE}{BC}$

$\dfrac{5}{5+4} = \dfrac{6}{BC}$

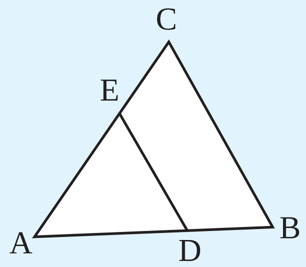
$5 \times BC = 6 \times 9$

$BC = \dfrac{6 \times 9}{5} = \dfrac{54}{5} = 10{,}8$ cm

Jadi panjang BC = 10,8 cm.

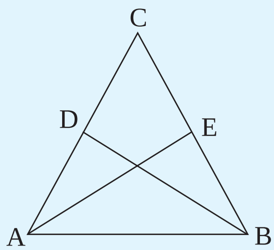
Latihan 1.5

1. Selidiki apakah segitiga-segitiga dengan ukuran di bawah ini sebangun dengan segitiga yang sisi-sisinya 10 cm, 8 cm, dan 6 cm.
   a. 15 cm, 20 cm, dan 25 cm
   b. 24 cm, 32 cm, dan 40 cm
   c. 9 cm, 12 cm, dan 14 cm
2. Diketahui ΔABC dan ΔPQR sebangun dengan $\angle A = 31^o$, $\angle B = 112^o$, $\angle P = 37^o$ dan $\angle Q = 31^o$.
   a. Tentukan $\angle C$ dan $\angle R$.
   b. Apakah $\Delta ABC \sim \Delta PQR$? Jelaskan.
   c. Pasangan sisi-sisi mana yang sebanding?
3. Perhatikan gambar di bawah ini.



   a. Jika $\angle CAB = \angle EAD$, buktikan $\Delta ABC \sim \Delta ADE$.
   b. Hitunglah panjang AB jika DE = 7 cm, BC = 15 cm, dan AE = 11 cm.

4. Perhatikan gambar di bawah ini.



CD dan BE merupakan garis tinggi Δ ABC.

a. Apakah Δ ABE ~ Δ ACD?

b. Jika BE = 10 cm, BA = 14 cm, dan AC = 17,5 cm, berapa panjang CD?

5. Diberikan trapesium ABCD mempunyai sisi AB // CD. Diagonal-diagonalnya berpotongan di E.

a. Buktikan bahwa Δ ABE ~ Δ CED.

b. Jika AB = 25 cm dan CD = 17 cm, tentukan AE : EC.

D. Penerapan Konsep Kesebangunan dalam Pemecahan Masalah

Dalam kehidupan sehari-hari banyak sekali pemanfaatan konsep kesebangunan. Pembuatan miniatur suatu bangunan, penggambaran peta suatu daerah semuanya menggunakan konsep kesebangunan. Lebih jelasnya perhatikan contoh berikut.

Contoh 1.10

Sebuah model/rancangan suatu pesawat terbang berskala 1 : 300. Jika panjang pesawat tersebut sesungguhnya adalah 60 meter dan jarak antara kedua ujung sayapnya 18 meter, tentukan ukuran-ukuran tersebut pada model/rancangannya.

Penyelesaian:

Misal panjang pesawat pada rancangan = x

Jarak kedua ujung sayap = y

Maka:

$$\frac{x}{6.000} = \frac{1}{300}$$

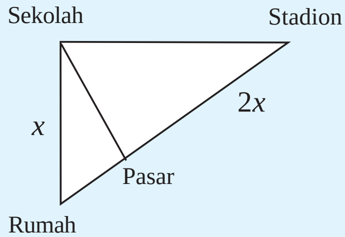
$$\frac{x}{18.00} = \frac{1}{300}$$

y = 6 cm

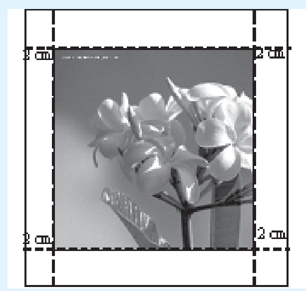
Jadi, panjang pesawat pada rancangan adalah 20 cm dan jarak kedua ujung sayap 6 cm.

Latihan 1.6

1. Jika jarak stadion ke sekolah 9 km, jarak rumah ke sekolah *x* km dan jarak pasar ke stadion 2*x* km. Tentukan:
   a. jarak rumah ke pasar,
   b. jarak pasar ke stadion.

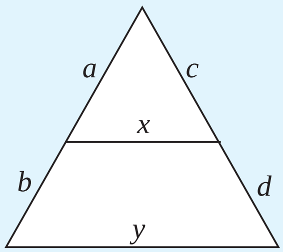


2. Sebuah gedung mempunyai bayangan 75 m di atas rumah permukaan tanah, sedangkan sebatang pohon, tingginya 9 m mempunyai bayangan 15 m. Tentukan tinggi gedung tersebut.
3. Foto dibingkai dengan ukuran 60 cm × 45 cm. Diketahui foto dengan bingkai sebangun. Jarak dari tepi kiri dan kanan bingkai 2 cm.
   a. Tentukan ukuran foto.
   b. Berapa jarak tepi atas bingkai dari tepi atas foto?



4. Tepi sebuah jendela mempunyai ukuran 100 cm dan lebar 70 cm. Jika tepi luar dan dalam jendela sebangun dan diketahui panjang tepi dalam jendela 135 cm, berapa lebar tepi dalam jendela?
5. Sebuah tiang listrik terkena sinar matahari sehingga terbentuk bayangan. Tiang tersebut diberi kawat dengan jarak 2,5 m dan membentuk bayangan 1,75 m. Berapa tinggi tiang listrik jika bayangan yang terbentuk 3,25 m?

Rangkuman

1. Dua segitiga dikatakan kongruen jika memenuhi sifat:
   a. Sudut-sudut yang seletak sama besar.
   b. Sisi-sisi yang seletak sama panjang.
2. Dua segitiga dikatakan sebangun jika memenuhi sifat:
   a. Sudut-sudut yang seletak sama besar.
   b. Sisi-sisi yang seletak sebanding.
3. 

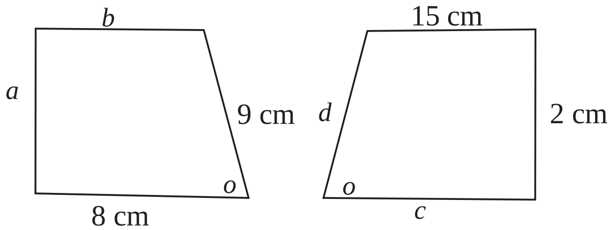
Dengan konsep kesebangunan diperoleh:

$$\frac{a}{a+b} = \frac{b}{c+d} = \frac{x}{y}$$

Uji Kompetensi

A. Pilihlah satu jawaban yang paling benar dengan cara memberi tanda silang (X) pada huruf *a, b, c,* atau *d*!

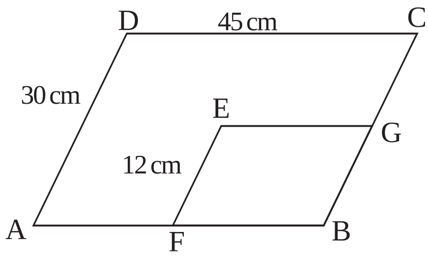
1. Perhatikan gambar berikut.



Dua bangun trapesium di atas kongruen. Nilai $a + b + c + d = \ldots.$

a. 24 c. 56
b. 34 d. 58

2.



Jajargenjang ABCD sebangun dengan jajargenjang EFBG. Panjang sisi EG adalah . . . .

a. 18 cm
b. 20 cm
c. 22 cm
d. 24 cm

3. Ukuran persegi panjang yang sebangun dengan persegi panjang berukuran 9 cm × 4 cm adalah . . . .

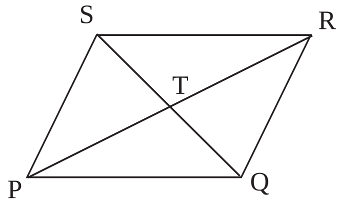
a. 14 cm × 7 cm
b. 9 cm × 3 cm
c. 27 cm × 12 cm
d. 21 cm × 14 cm

4. Pak Bahri membuat bingkai foto dari kayu. Bagian tepi luar bingkai berukuran 45 cm × 15 cm, sedangkan lebar bagian tepi dalam bingkai adalah 7 cm. Bila Pak Bahri menghendaki bagian dalam bingkai sebangun dengan bagian luar maka panjang bagian tepi dalam bingkai adalah . . . .

a. 14 cm
b. 17 cm
c. 20 cm
d. 21 cm

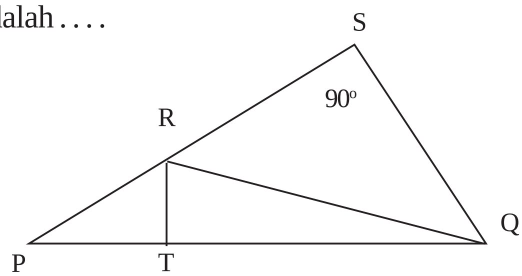
5. Pada jajargenjang PQRST di bawah, pasangan segitiga yang kongruen adalah . . . .

a. ΔPST dengan ΔSTR
b. ΔQTR dengan ΔPQT
c. ΔPSR dengan ΔQSR
d. ΔPSR dengan ΔRQP

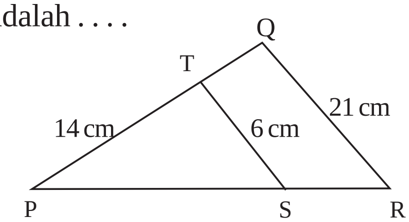


6. Pada segitiga PQR di bawah ini RT ⊥ PQ dan QS ⊥ PR. Yang merupakan pasangan segitiga sebangun adalah . . . .

a. ΔSQR dengan ΔTQR
b. ΔPTR dengan ΔTQR
c. ΔPQS dengan ΔPQR
d. ΔPTR dengan ΔPSQ

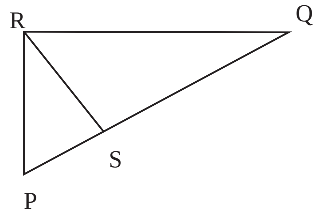


7. Pada PQR, TS // QR. Jika panjang PT = 14 cm, ST = 6 cm, dan QR = 21 cm, maka panjang TQ adalah . . . .



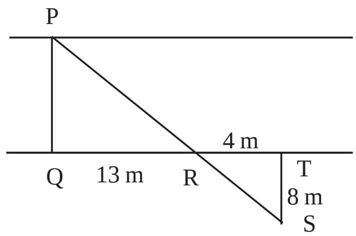
a. $3\frac{1}{3}$ cm
b. 4 cm
c. $8\frac{2}{3}$ cm
d. 9 cm

8. Segitiga PQR siku-siku dan PS ⊥ RS. Jika panjang PR = 9 cm dan PQ = 18 cm, panjang sisi PS adalah . . . .



a. 4,5 cm
b. 5 cm
c. 6,5 cm
d. 9 cm

9. Seorang pemuda menghitung lebar sungai dengan menancapkan tongkat di Q, R, S, dan T (seperti gambar) sehingga S, R, P segaris (P = benda di seberang sungai). Lebar sungai (PQ) adalah . . . .

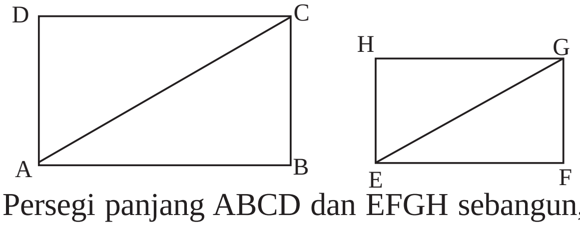


a. 17 m
b. 19 m
c. 26 m
d. 34 m

10. Gedung yang tingginya 48 m mempunyai panjang bayangan 64 m. Pada saat dan tempat yang sama sebuah tiang mempunyai panjang bayangan 18 m. Maka tinggi tiang sebenarnya adalah . . . .

a. 13,5 cm
b. 14,3 m
c. 16 m
d. 18,5 m

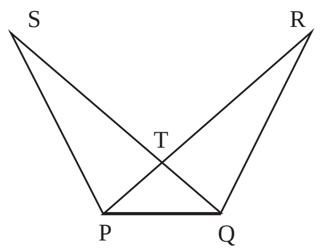
11. Perhatikan gambar di bawah ini.



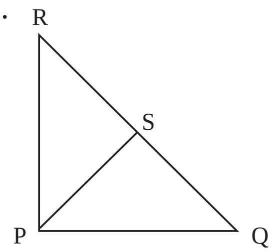
Persegi panjang ABCD dan EFGH sebangun, panjang BC = 18 cm, EF = 9 cm, dan FG = 6 cm. Panjang AB adalah . . . .

a. 20 cm
b. 27 cm
c. 42 cm
d. 58 cm

12. Dua bangun berikut yang pasti sebangun adalah . . . .
    a. dua persegi
    b. dua belah ketupat
    c. dua segitiga sama kaki
    d. dua persegi panjang
13. Ukuran persegi panjang yang sebangun dengan persegi panjang berukuran 24 cm × 8 cm adalah . . . .
    a. 8 cm × 2 cm
    b. 6 cm × 2 cm
    c. 4 cm × 4 cm
    d. 5 cm × 7 cm
14. Perhatikan gambar di bawah ini.

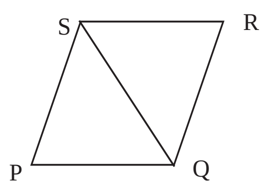


Pada gambar tersebut PT = QT, ST = RT, dan PR = QS. Banyak pasangan segitiga yang kongruen adalah . . . .
    a. 1
    b. 2
    c. 3
    d. 4
15. Pada gambar di bawah, ΔPQS dikatakan kongruen dengan ΔPRS sebab memenuhi syarat dua segitiga kongruen, yaitu . . . .
    a. sisi, sisi, sisi
    b. sisi, sisi, sudut
    c. sisi, sudut, sisi
    d. sudut, sisi, sudut



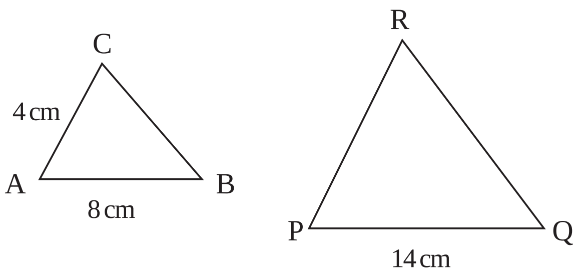
B. Jawablah pertanyaan-pertanyaan di bawah ini dengan benar!

1. Perhatikan gambar berikut ini.



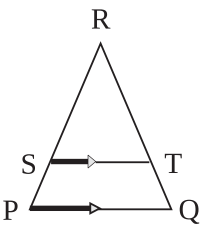
Diketahui panjang PQ = RS dan PS = QR. Jika Δ PQS dan Δ RSQ kongruen, tentukan pasangan sudut yang sama besar.

2.



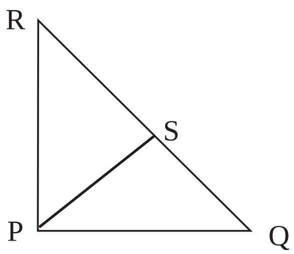
Pada gambar di atas Δ ABC sebangun dengan Δ PQR. Berapakah panjang sisi PR?

3.



Gambar di atas menunjukkan Δ PQR dengan ST // PQ. Bila diketahui panjang RS = 12 cm, PS = 4 cm, dan ST = 6 cm, berapakah panjang PQ?

4.



Gambar di atas menunjukkan Δ PQR dengan PS ⊥ QR. Bila panjang QR = 16 cm dan SQ = 9 cm, berapakah panjang PQ?

5. Seorang anak yang tingginya 1,4 m berdiri pada jarak 6 m dari tiang lampu. Jika panjang bayangan anak itu oleh sinar lampu adalah 4 m, berapakah tinggi tiang lampu sebenarnya?

BAB II
BANGUN RUANG SISI LENGKUNG

Peta Konsep

Bangun Ruang sisi Lengkung

jenis

Tabung — Kerucut — Bola

untuk menentukan

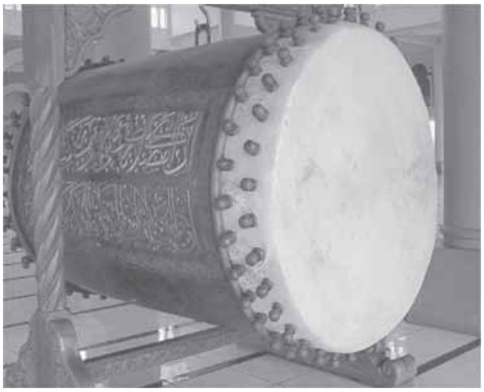
Unsur dan jaring-jaring — Luas permukaan — Volume

untuk

Merumuskan hubungan volume dengan jari-jari — Memecahkan masalah

Kata Kunci

1. Tabung
2. Kerucut
3. Bola
4. Jaring-jaring
5. Luas permukaan
6. Volume



Sumber: www.tabloidnova.com
Gambar 2.1 Bedug salah satu aplikasi dari tabung

Di sekitar kita banyak dijumpai benda-benda yang merupakan refleksi dari bangun ruang sisi lengkung. Bahkan benda-benda tersebut sering kita gunakan baik sebagai peralatan maupun permainan. Sebut saja bola, kelereng, kaleng minuman, bedug, terompet, dan corong. Jika demikian, benda-benda tersebut tidak asing lagi bagi kita.

Benda-benda tersebut merupakan refleksi dari bangun ruang yang berupa bola, tabung, dan kerucut. Akan lebih menyenangkan jika kita dapat mengetahui berapa banyak benda-benda tersebut menampung udara, air, serta berapa panjang dan luas kulit bola atau kaleng tersebut. Untuk itu kita akan pelajari lebih lanjut dalam bab Bangun Ruang Sisi Lengkung.

Setelah mempelajari bab ini diharapkan kalian dapat mengidentifikasi unsur-unsur tabung, kerucut, dan bola serta menghitung luas selimut dan volume bangun tersebut. Yang tak kalah penting adalah kalian dapat memecahkan masalah yang berkaitan dengan bangun ruang tersebut.

A. Tabung (Silinder)

Sumber: www.orbiter.co.uk
Gambar 2.2 Drum

Perhatikan gambar di samping. Bentuk apakah yang dimanfaatkan alat musik tersebut. Mengapa drum selalu berbentuk tabung?

1. Unsur-unsur Tabung dan Melukis Jaring-jaring Tabung

Sebelum kita mempelajari lebih lanjut mengenai tabung, coba sebutkan benda-benda di sekitar kalian yang berbentuk tabung. Berikut ini akan kita pelajari berbagai hal tentang tabung.

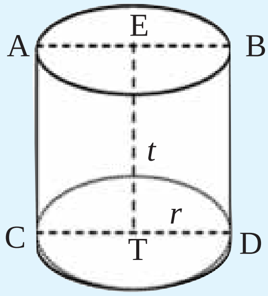
a. Unsur-unsur Tabung

Dapatkah kalian menyebutkan unsur-unsur sebuah tabung? Agar dapat menjawabnya, lakukanlah kegiatan berikut.

Kegiatan

Ikuti langkah-langkah berikut ini.

1. Sediakan satu buah kaleng susu bekas. Alangkah lebih baik jika masih ada kertas labelnya.
2. Amati dengan saksama kaleng tersebut.
3. Lepaskan kertas label dari kaleng susu. Bentuk apa yang kalian peroleh?
4. Coba gambarkan kaleng susu tersebut. Apakah seperti gambar berikut ini?



Dari kegiatan tersebut kita akan dapat mengetahui unsur-unsur tabung. Salin dan isikan unsur-unsur itu pada tempat yang tersedia.

a. Tinggi tabung ....

b. Jari-jari alas tabung ... dan jari-jari atas tabung ....

c. Diameter alas tabung ... dan diameter atap tabung ....

d. Alas dan atap tabung berupa bidang datar yang berbentuk ....

e. Selimut tabung berupa bidang lengkung. Apabila dibuka dan dilembarkan berbentuk ....

b. Jaring-jaring Tabung

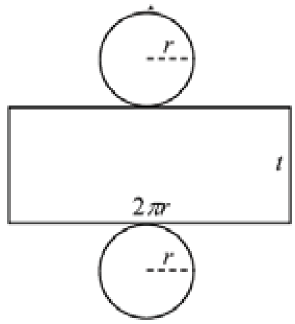
Dari kegiatan sebelumnya kita dapat mengetahui bahwa tabung atau silinder tersusun dari tiga buah bangun datar, yaitu:

a. dua buah lingkaran sebagai alas dan atap silinder,

b. satu buah persegi panjang sebagai bidang lengkungnya atau selimut tabung.

Rangkaian dari ketiga bidang datar itu disebut sebagai **jaring-jaring tabung.**

Coba kalian gambarkan jaring-jaring dari kaleng tersebut. Apakah kalian mendapatkan jaring-jaring tabung seperti gambar berikut?



Gambar 2.3 Jaring-jaring tabung

Gambar 2.3 menunjukkan jaring-jaring sebuah tabung dengan jari-jari alas dan atapnya yang berupa lingkaran adalah r dan tinggi tabung adalah t.

Jaring-jaring tabung terdiri atas:

a. Selimut tabung yang berupa persegi panjang, dengan panjang selimut sama dengan keliling lingkaran alas tabung $2\pi r$ dan lebar selimut sama dengan tinggi tabung t.

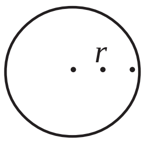
b. Dua lingkaran dengan jari-jari r.

2. Menghitung Luas Selimut dan Volume Tabung

Sebuah benda berbentuk tabung memiliki jari-jari r dan tinggi t. Jika kalian ingin membuat tabung dari kertas yang ukurannya tepat sama dengan ukuran benda tersebut, berapakah luas kertas yang kalian perlukan? Untuk menjawabnya, pelajari uraian materi berikut.

a. Luas Selimut

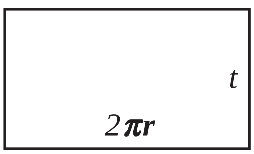
Dengan memerhatikan gambar 2.3, kita dapat mengetahui bahwa luas seluruh permukaan tabung atau luas sisi tabung merupakan jumlah dari luas alas ditambah luas selimut dan luas atap. Untuk lebih jelasnya perhatikan gambar jaring-jaring tabung sekali lagi.



(a)

Luas atap = Luas lingkaran

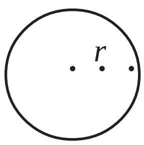
$$= \pi r^2$$



(b)

L selimut = L persegi panjang

$$= p \times l$$
$$= 2\pi r \times t$$
$$= 2\pi r t$$



(c)

Luas alas = Luas lingkaran

$$= \pi r^2$$

Sehingga kita dapatkan rumus:

$$\textbf{Luas permukaan tabung} = 2\pi r^2 + 2\pi rt = 2\pi r\,(r + t)$$

dengan r = jari-jari lingkaran alas tabung

t = tinggi tabung

b. Volume Tabung

Tabung merupakan pendekatan dari prisma segi-n, dimana n mendekati tak hingga. Artinya, jika rusuk-rusuk pada alas prisma diperbanyak maka akan membentuk sebuah tabung dimana hanya mendekati satu bidang alas, satu bidang atas dan satu sisi tegak. Karena alas dan tutup tabung berbentuk lingkaran maka volume tabung adalah perkalian luas daerah lingkaran alas dengan tinggi tabung.

$$\boxed{V = r^2t} \quad \textbf{atau} \quad \boxed{V = \frac{1}{4}d^2t}$$

dengan r = jari-jari lingkaran alas

d = diameter lingkaran alas

t = tinggi tabung

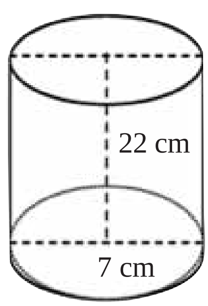
Contoh 2.1

1. Sebuah tabung memiliki tinggi 22 cm dan jari-jari lingkaran alasnya 7 cm.

   Hitunglah:

   a. luas selimut tabung,

   b. luas sisi tabung,



Penyelesaian:

a. Luas selimut tabung $= 2\pi rt$

$= \frac{22}{7} \times 7 \times 22$

$= 968 \text{ cm}^2$

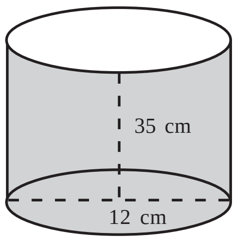
b. Luas sisi tabung $= 2\pi r\,(r + t)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 8\ (7 + 22)$

$= 44 \times 29$

$= 1.276 \text{ cm}^2$

2. Perhatikan gambar berikut.



Jika kita ingin membuat kaleng terbuka seperti gambar di samping, berapakah luas seng yang diperlukan untuk membuatnya?

Penyelesaian:

Luas seng = Luas selimut + Luas alas tabung

$= (2\pi rt) + (\pi r^2)$

$= 2 \times \ \times 12 \times 15 + (\frac{22}{7} \times 12 \times 12)$

$= 2.640 + 452,57$

$= 3.092,57 \text{ cm}^2$

3. Tentukan volume tabung dengan jari-jari alas 9 cm dan tinggi tabung 18 cm?

Penyelesaian:

$V = \pi r^2 t$

$= 3,14 \times 9 \times 9 \times 18 = 4.578,12 \text{ cm}^3$

Latihan 2.1

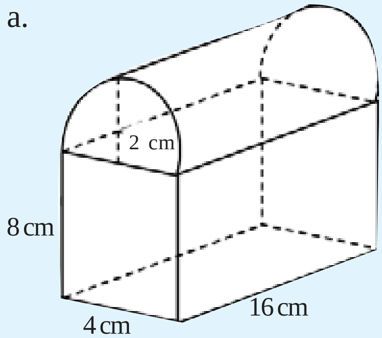
1. Jari-jari alas suatu tabung adalah 15 cm. Tentukan

tinggi tabung jika selimut tabung luasnya 2.065 cm^2.

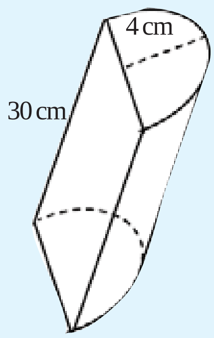
Gunakan nilai $\pi = . \frac{22}{7}$

2. Tentukan luas sisi tabung jika diketahui tinggi tabung 21 cm dan luas selimut tabung tanpa atap adalah 836 cm^2.
3. Sebatang kayu berbentuk silinder akan digunakan sebagai bahan bangunan. Untuk itu kayu tersebut dipotong sepanjang 1,5 m. Jika panjang kayu 4,5 m dan lebar 1,5 m, hitunglah:
   a. luas permukaan kayu setelah dipotong,
   b. volume kayu setelah dipotong.
4. Tentukan luas seluruh permukaan bangun berikut.

a.



b.



B. Kerucut

1. Unsur-unsur Kerucut dan Melukis Jaring-jaring Kerucut

Sumber: www.inculs.or.id

Gambar 2.4 Monumen Jogja Kembali

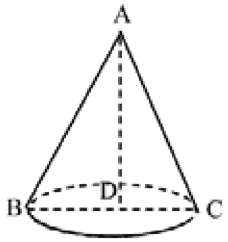
Perhatikan gambar di samping.

Pernahkan kalian melihat bangunan ini?

Jika kita cermati bentuknya, bangunan tersebut merupakan refleksi dari bangun ruang dengan sisi lengkung yaitu kerucut.

a. Unsur-unsur Kerucut

Untuk lebih memahami unsur-unsur kerucut, dapat kita ilustrasikan seperti pada gambar 2.5 berikut.



Gambar 2.5 Abstraksi bentuk kerucut

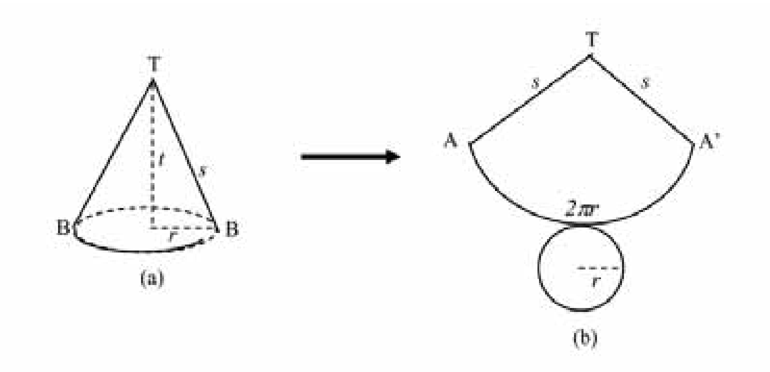
Dengan mengamati gambar tersebut, kita dapat mengetahui unsur-unsur kerucut dengan melengkapi pernyataan berikut.

1) Tinggi kerucut = ….
2) Jari-jari alas kerucut = ….
3) Diameter alas kerucut = ….
4) Apotema atau garis pelukis = ….

b. Jaring-jaring Kerucut

Berdasarkan kegiatan dan gambar di atas kita ketahui bahwa kerucut tersusun dari dua bangun datar, yaitu lingkaran sebagai alas dan selimut yang berupa bidang lengkung (juring lingkaran). Kedua bangun datar yang menyusun kerucut tersebut disebut ***jaring-jaring kerucut***.

Perhatikan gambar berikut.



Gambar 2.6 Jaring-jaring kerucut

Gambar 2.6(a) menunjukkan kerucut dengan jari-jari lingkaran alas *r*, tinggi kerucut *t*, apotema atau garis pelukis *s*.

Terlihat bahwa jaring-jaring kerucut terdiri atas dua buah bidang datar yang ditunjukkan gambar 2.6 (b) yaitu:

a. selimut kerucut yang berupa juring lingkaran dengan jari-jari *s* dan panjang busur $2\pi r$,

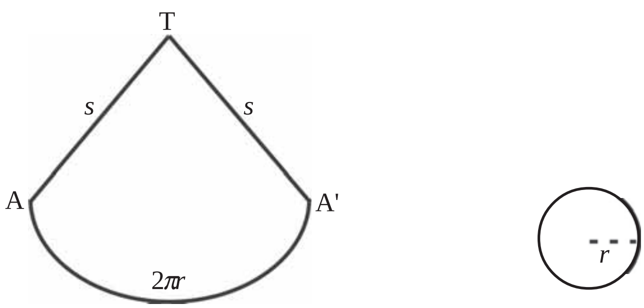
b. alas yang berupa lingkaran dengan jari-jari *r*.

2. Menghitung Luas Selimut dan Volume Kerucut

Dapatkah kalian menghitung luas bahan yang diperlukan untuk membuat kerucut dengan ukuran tertentu? Perhatikan uraian berikut.

a. Luas Selimut

Dengan memerhatikan gambar, kita dapat mengetahui bahwa luas seluruh permukaan kerucut atau luas sisi kerucut merupakan jumlah dari luas juring ditambah luas alas yang berbentuk lingkaran. Untuk lebih jelasnya perhatikan jaring-jaring kerucut ini.



(a) (a)

Gambar 2.7 (a) juring lingkaran (selimut kerucut)
(b) bidang alas kerucut

Perhatikan gambar 2.7 (a).

Busur AA_1 = keliling lingkaran alas kerucut = $2\pi r$.

Luas lingkaran dengan pusat T dan jari-jari $s = \pi s^2$ dan kelilingnya = $2\pi s$.

Jadi luas juring TAA_1 atau luas selimut kerucut dapat ditentukan.

$$\frac{\text{Luas juring } TAA_1}{\text{Luas Lingkaran}} = \frac{\text{Luas busur } AA_1}{\text{Keliling lingkaran}} =$$

$$\frac{\text{Luas juring } TAA_1}{2\pi r} = \frac{2\pi r}{2\pi r}$$

$$\text{Luas juring } TAA_1 = \frac{\pi r^2 \text{ x } 2\pi r}{2\pi r}$$

$$= \pi rs$$

Karena luas selimut kerucut sama dengan luas juring TAA_1 maka kita dapatkan:

Luas selimut = πrs

Sedangkan luas permukaan kerucut

= luas selimut + luas alas kerucut

= $\pi rs + \pi r^2$

= $\pi r(s + r)$

Jadi

Luas permukaan kerucut = $\pi r(s + r)$

dengan r = jari-jari lingkaran alas kerucut

s = garis pelukis (apotema)

b. Volume Kerucut

Kerucut dapat dipandang sebagai limas yang alasnya berbentuk lingkaran. Oleh karena itu kita dapat merumuskan volume kerucut sebagai berikut.

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 t$$

Hubungan antara r, t dan apotema (s) adalah $s^2 = r^2 + t^2$

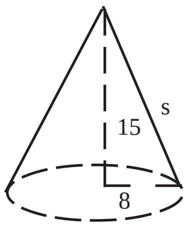
Contoh 2.2

1. Diketahui jari-jari alas kerucut 8 cm dan tinggi kerucut 15 cm. Tentukan:

   a. panjang apotema,

   b. luas selimut kerucut,

   c. luas sisi kerucut.



   Penyelesaian:

   a. Panjang apotema (s) $= \sqrt{8^2+15^2}$

   $= \sqrt{64+225}$

   $= \sqrt{289} = 17$ cm

   b. Luas selimut $= \pi rs$

   $= 3{,}14 \times 8 \times 15$

   $= 370{,}8$ cm^2

   c. Luas permukaan kerucut $= \pi r\,(r + s)$

   $= 3{,}14 \times 8 \times (8 + 15)$

   $= 25{,}12 \times 23$

   $= 577{,}76$ cm^2

2. Diameter alas suatu kerucut 16 cm dan panjang apotemanya 17 cm. Tentukan volume kerucut tersebut.

   Penyelesaian:

   Diameter = 16 cm, maka r = 8 cm

   $s = 17$ cm

   $t^2 = s^2 - r^2$

   $= 17^2 - 8^2$

   $t = 15$ cm

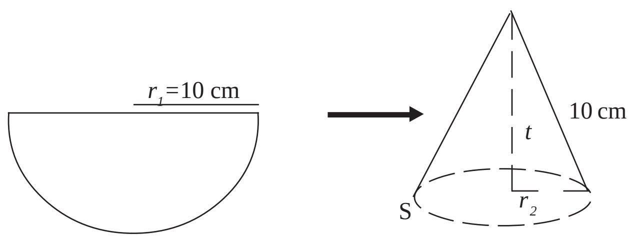
maka volumenya

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 t$$
$$= \frac{1}{3} \times 3{,}14 \times 82 \times 15$$
$$= 1.004{,}8 \text{ cm}^3$$

3. Sebuah kerucut dari selembar karton berbentuk setengah lingkaran dengan diameter 30 cm.

   Tentukan panjang jari-jari alas kerucut tersebut.

   Penyelesaian:



Jari-jari karton = apotema kerucut = s

Luas karton kerucut = luas selimut kerucut

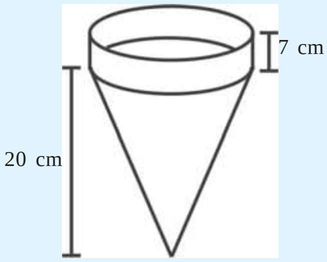
$$\pi r s = \frac{1}{2} \pi \times 10 \times 10$$
$$\pi \times r \times 10 = 50\pi$$
$$r = \frac{50\pi}{10\pi}$$
$$r = 5$$

Jadi panjang jari-jari alas kerucut 5 cm.

Latihan 2.2

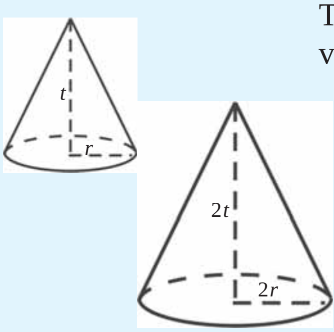
1. Diketahui panjang apotema sebuah kerucut 10 cm dan jari-jari alasnya 6 cm. Hitunglah luas sisi kerucut dengan nilai $\pi = 3{,}14$.
2. Jari-jari alas suatu kerucut 7 cm dan tingginya 32 cm. Hitunglah luas permukaan kerucut itu dengan $\pi = .\frac{1}{2}$

3. Perhatikan gambar berikut.



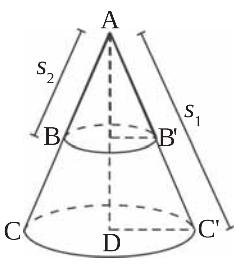
Sebuah topi seperti di samping mempunyai jari-jari lubang lingkaran 5 cm. Berapa luas karton yang diperlukan untuk membuat topi tersebut?

4. Suatu kerucut dibentuk dari selembar seng yang berbentuk setengah lingkaran yang berdiameter 14 m. Hitunglah:
   a. jari-jari alas,
   b. tinggi kerucut.
5. Tentukan perbandingan volume kerucut dan volume tabung dengan gambar di samping.



c. *Luas Selimut dan Volume Kerucut Terpancung*

1) *Luas selimut*



Gambar 2.8 Kerucut terpancung

Luas selimut kerucut terpancung adalah luas kerucut besar dikurangi luas selimut kerucut kecil. Kerucut besar ACC' mempunyai tinggi t_1, jari-jari r, dan apotema s_1. Sedangkan kerucut kecil ABB' mempunyai tinggi t_2, jari-jari r_2, dan apotema s_2.

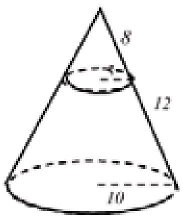
Luas selimut kerucut terpancung adalah luas selimut kerucut besar dikurangi luas selimut kecil.

Luas selimut kerucut terpancung = $\pi r_1 s_1 - \pi r_2 s_2$

Volume kerucut terpancung adalah volume kerucut besar dikurangi volume kerucut kecil $= \frac{1}{2}\pi r_1^{\,2} t_1 - \frac{1}{3}\pi r_2^{\,2}$.

$$\textbf{Volume kerucut terpancung} = \frac{1}{3}\pi(r_1^{\,2}t_1 - r_2^{\,2}t_2)$$

Contoh 2.3



Gambar di samping merupakan sebuah tutup lampu dengan jari-jari lingkaran atas 5 cm dan jari-jari lingkaran bawah 10 cm. Hitunglah luas bahan yang digunakan untuk membuat tutup lampu tersebut.

Penyelesaian:

Untuk kerucut besar $\rightarrow r_1 = 10$ dan $s_1 = 20$

Untuk kerucut kecil $\rightarrow r_2 = 5$ dan $s_2 = 8$

Luas bahan = luas selimut kerucut besar - luas selimut kerucut kecil

$= \pi r_1^{\,2} s_1 - r_2^{\,2} s_2$

$= (3{,}14 \times 10 \times 20) - (3{,}14 \times 5 \times 8)$

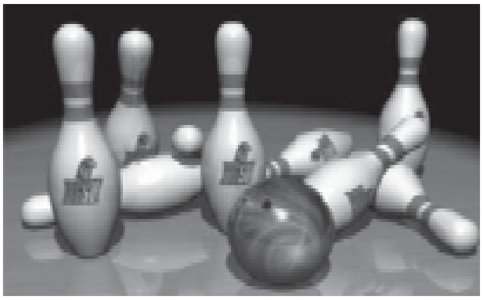
$= 628 - 125{,}6$

$= 502{,}4 \text{ cm}^2$

Latihan 2.3

1. Nasi tumpeng dengan tinggi 40 cm dan jari-jari alas 10 cm di potong ujung atasnya setinggi 8 cm dengan volume 150 cm^3. Hitunglah:
   a. Luas minyak yang digunakan untuk melapisi tumpeng setelah dipotong.
   b. Volume tumpeng setelah dipotong.
2. Suatu kerucut dengan tinggi t dan jari-jari r, terpancung pada tinggi $\frac{1}{4}t$ dari puncak kerucut. Tentukan perbandingan volume kerucut dengan tinggi t, volume kerucut kecil, dan volume kerucut terpancung. Apa yang dapat kalian simpulkan?

C. Bola



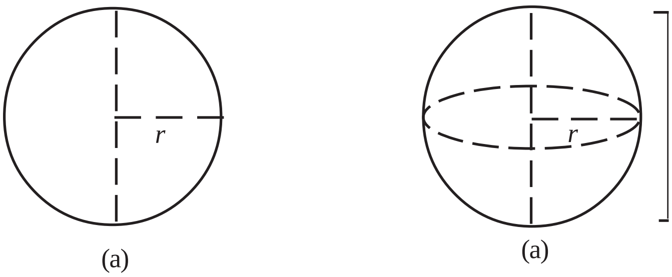
Sumber: www.files.turbosquid.com

Gambar 2.9 Bola bowling

Perhatikan gambar di samping. Mengapa dalam olahraga bowling, benda yang dilemparkan berbentuk bola? Apakah kelebihannya sehingga benda-benda berbentuk bola digunakan dalam olahraga sepak bola, bola voli, bowling, dan billiard? Agar dapat lebih mengenal bangun bola, pelajarilah materi berikut ini.

1. Unsur-unsur Bola

Perhatikan gambar berikut.



Gambar 2.10 Unsur-unsur bola

Suatu lingkaran diputar setengah putaran dengan diameter sebagai sumbu putarnya akan diperoleh bangun ruang seperti gambar 2.10 (b). Bentuk bangun yang demikian disebut bola dengan jari-jari bola r dan tinggi d.

2. Menghitung Luas Selimut dan Volume Bola

Sebelum mempelajari luas selimut dan volume bola, lakukanlah kegiatan berikut.

Kegiatan 2.2

Lakukan kegiatan berikut.

1. Siapkan benang, bola dan tabung dengan tinggi dan diameter alasnya sama dengan diameter bola.
2. Lilitkan benang pada permukaan bola hingga tertutup sempurna.
3. Kemudian gunakan panjang benang tersebut untuk melilit tabung.
4. Amati apa yang terjadi dan kemukakan kesimpulanmu.

Ternyata dari kegiatan di atas kita dapat merumuskan luas selimut atau permukaan (sisi) bola. Jika jari-jari alas tabung tersebut *r* dan tingginya sama dengan diameter *d*, maka luas selimut atau sisi bola dengan jari-jari *r* adalah:

$$\begin{aligned} \text{Luas sisi bola} &= (2\pi r) \times d \\ &= (2\pi r) \times 2\ r \\ &= 4\pi r^2 \end{aligned}$$

Jadi diperoleh:

$$\boxed{\textbf{Luas sisi bola} = 4\pi r^2}$$

Adapun volume bola dengan jari-jari r adalah

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{atau} \quad V = \frac{1}{6}\pi d^3}$$

dengan r = jari-jari bola

d = diameter bola

Contoh 2.4

1. Hitunglah luas sisi bola dan volume bola yang berdiameter 11 cm.

   Penyelesaian:

   $$\begin{aligned} \text{Luas sisi bola} &= 4\pi r^2 \\ &= 4 \times 3{,}14 \times 5{,}5 \times 5{,}5 \\ &= 379{,}94 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\text{Volume bola} = \frac{1}{6}\pi d^3$$
$$= \frac{1}{6} \times 3{,}14 \times 11 \times 11 \times 11$$
$$= 696{,}\ 56\ \text{cm}^3$$

2. Volume sebuah bola 1.400 cm^3. Tentukan jari-jari selimut bola.

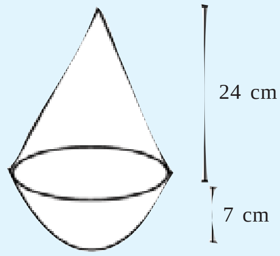
Penyelesaian:

$$V = \frac{4}{3}\ r^3$$
$$1.400 = \frac{1}{6} \times 3{,}14 \times r^3$$
$$1.400 = 4{,}14\ r^3$$
$$r^3 = 334{,}13$$
$$r = \sqrt[3]{334{,}13} = 6{,}9\ \text{cm}$$

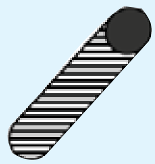
Latihan 2.4

1. Hitunglah luas selimut dan volume dari bola dengan diameter 3,5 cm.
2. Hitunglah jari-jari bola jika volume bola:
   a. 376,59 cm^3,
   b. 43,699 cm^3.
3. Hitunglah diameter bola jika luas seluruhnya:
   a. 526,3 cm^2,
   b. 37,26 cm^2.
4. Sebuah mangkuk setengah lingkaran dengan r = 16 cm. Mangkuk itu diisi air sampai penuh. Kemudian, air tersebut dituang ke dalam kaleng berbentuk silinder dengan jari-jari sama dengan jari-jari bola. Ternyata air tersebut tepat memenuhi tabung. Berapa tinggi tabung itu?

5. Sebuah bandul terdiri dari sebuah kerucut dan belahan bola dengan $r = 7$ cm, dan tinggi kerucut 24 cm. Tentukan volume bandul dan luas permukaan bandul.



6. Sebuah pensil seperti di samping dengan panjang berbentuk tabung 10 cm, ujung berbentuk kerucut dengan panjang 2 cm, dan jari-jari 0,5 cm. Hitunglah luas permukaan dan volume pensil tersebut.



D. Hubungan Volume Bangun Ruang Sisi Lengkung dengan Jari-jari

Pada rumus mencari volume bangun ruang sisi lengkung, semua tergantung pada unsur-unsur bangun tersebut, misalnya jari-jari dan tinggi bangun tersebut.

1. Perbandingan Volume Tabung, Kerucut, dan Bola karena Perubahan Jari-jari

a. Perbandingan Volume Tabung

Apabila ada dua buah tabung dengan tinggi yang sama, tetapi jari-jari berbeda, maka perbandingan kedua volume tabung sama dengan perbandingan kuadrat masing-masing jari-jarinya.

$$\begin{aligned} V_1 : V_2 &= \pi r_1^2 t : \pi r_2^2 t \\ &= r_1^2 : r_2^2 \end{aligned}$$

Jadi

$$\boxed{\boldsymbol{V_1 : V_2 = r_1^2 : r_2^2}}$$

dengan V_1 = volume tabung pertama
V_2 = volume tabung kedua
r_1 = jari-jari lingkaran alas tabung 1
r_2 = jari-jari lingkaran alas tabung 2

b. Perbandingan Volume pada Kerucut

Apabila ada dua buah kerucut dengan tinggi sama, tetapi jari-jari alasnya berbeda, maka perbandingan volume kedua kerucut dengan perbandingan kuadrat masing-masing jari-jarinya.

$$V_1 : V_2 = \frac{1}{3}\pi r_1^2 t : \frac{1}{3} r_2^2 t$$

$$= r_1^2 : r_2^2$$

Jadi

$$\boxed{\boldsymbol{V_1 : V_2 = r_1^2 : r_2^2}}$$

dengan V_1 = volume kerucut pertama
V_2 = volume kerucut kedua
r_1 = jari-jari lingkaran alas kerucut 1
r_2 = jari-jari lingkaran alas kerucut 2

c. Perbandingan Volume pada Bola

Apabila ada dua buah bola dengan jari-jari yang berbeda, maka perbandingan volumenya sama dengan perbandingan di pangkat tiga dan masing-masing jari-jarinya.

$$V_1 : V_2 = \frac{4}{3} r_1^3 : \frac{4}{3} r_2^3$$

$$= r_1^3 : r_2^3$$

Jadi

$$\boxed{V_1 : V_2 = r_1^3 : r_2^3}$$

dengan V_1 = volume bola pertama
V_2 = volume bola kedua
r_1 = jari-jari lingkaran alas bola 1
r_2 = jari-jari lingkaran alas bola 2

Contoh 2.5

1. Dua buah tabung dengan tinggi sama mempunyai jari-jari lingkaran alas 3,5 cm dan 5 cm. Carilah perbandingan volume kedua tabung.

   Penyelesaian:

   $$\begin{aligned} V_1 : V_2 &= r_1^2 : r_2^2 \\ &= (3,5)^2 : 5^2 \\ &= 12,25 : 25 \\ &= (0,49 \times 25) : (1 \times 25) \end{aligned}$$

   Jadi perbandingan volumenya $V_1 : V_2 = 0,49 : 1$.

2. Diberikan kerucut A dengan r_A= 9 cm dan kerucut B dengan tinggi yang sama dengan kerucut A. Jika perbandingan volume keduanya adalah 7 : 4.

   Berapa panjang jari-jari kerucut B?

   Penyelesaian:

   $$V_A : V_B = r_A^2 : r_B^2$$

   $$\frac{V_A}{V_B} = \frac{r_A^2}{r_B^2}$$

   $$\frac{7}{4} = \frac{9^2}{r_B^2}$$

   $$\frac{7}{4} .= \frac{81}{r_B^2}$$

$$r_B^{\,2} = \frac{81 \times 4}{7}$$

$$r_B^{\,2} = \frac{324}{7}$$

$$r_B^{\,2} = 46{,}29$$

$$r_B = \sqrt{46.28\text{-}9} = 6{,}8 \text{ cm}$$

Jadi jari-jari lingkaran alas kerucut B adalah 6,8 cm.

3. Dua buah bola dengan jari-jari bola pertama r_A dan jari-jari bola kedua r_B dengan $r_B = \frac{1}{3} r_A$. Carilah perbandingan volume kedua bola tersebut.

Penyelesaian:

$$V_1 : V_2 = r_A^{\,3} \; ; \; r_B^{\,3}$$

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{r_A}{r_B^{\,3}}$$

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{r_A^{\,3}}{\left(\frac{1}{3} r_A\right)^3}$$

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{r_A^{\,3}}{\frac{1}{29} r_A^{\,3}}$$

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{27}{1}$$

Jadi perbandingan volume keduanya adalah 27 : 1.

2. Selisih Volume Tabung, Kerucut, dan Bola karena Perubahan Jari-jari

a. Selisih Volume pada Tabung

Sebuah tabung dengan jari-jari lingkaran alas r_1 dan tinggi t diperbesar sehingga jari-jari lingkaran alas menjadi r_2 dengan $r_2 > r_1$ dan tinggi tetap. Maka berlaku:

$$
\begin{aligned}
V_2 - V_1 &= \pi r_2^2 t - \pi r_1^2 t \\
&= \pi(r_2^2 - r_1^2)t
\end{aligned}
$$

Jadi selisih volumenya:

$$\boxed{\boldsymbol{V_2 - V_1 = \pi(r_2^2 - r_1^2)t}}$$

dengan r_1 = jari-jari tabung

r_2 = jari-jari setelah diperbesar

Bagaimana jika jari-jari lingkaran alas tabung diperpanjang sebesar k satuan? Berlaku $r_2 = r_1 + k$, sehingga:

$$
\begin{aligned}
V_2 - V_1 &= \pi r_2^2 t - \pi r_1^2 t \\
&= \pi(r_1 + k)^2 t - \pi r_1^2 t \\
&= \pi(r_1^2 + 2kr_1 + k^2)t - \pi r_1^2 t \\
&= \pi(r_1^2 + 2kr_1 + k^2 - r_1^2)t \\
&= \pi(2kr_1 + k^2)t \\
&= \pi(2r_1 + k)kt
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\boldsymbol{V_2 - V_1 = \pi(2r_1 + k)kt}}$$

b. Selisih Volume pada Kerucut

Sebuah kerucut dengan jari-jari lingkaran alas r_1 dan tinggi t diperbesar sehingga jari-jari lingkaran alas menjadi r_2 dengan $r_2 > r_1$ dan tinggi tetap. Berlaku:

$$
\begin{aligned}
V_2 - V_1 &= \frac{1}{3}\pi(r_2^2 t - r_1^2 t) \\
&= \frac{1}{3}\pi(r_2^2 - r_1^2)t
\end{aligned}
$$

Jadi selisih volumenya:

$$\boldsymbol{V_2 - V_1 = \frac{1}{3}\pi(r_2^{\,2} - r_1^{\,2})t}$$

dengan r_1 = jari- jari awal

r_2 = jari-jari setelah diperbesar

Bagaimana jika jari-jari kerucut diperpanjang sebesar k satuan? Ternyata berlaku $r_2 = r_1 + k$, sehingga:

$$\begin{aligned}
V_2 - V_1 &= \frac{1}{3}\ \pi(r_2^{\,2}t - r_1^{\,2}t) \\
&= \frac{1}{3}\pi(r_1 + k)^2t - \frac{1}{3}\pi r_1^{\,2}t \\
&= \frac{1}{3}\pi((r_1^{\,2} + 2kr_1 + k^2)t - r_1^{\,2}t) \\
&= \frac{1}{3}\pi(r_1^{\,2} + 2kr_1 + k^2 - r_1^{\,2})t \\
&= \frac{1}{3}\pi(2kr_1 + k^2)t \\
&= \frac{1}{3}\pi(2r_1 + k)kt
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{V_2 - V_1 = \frac{1}{3}\ \pi(2r_1 + k)kt}$$

c. Selisih Volume pada Bola

Sebuah bola dengan jari-jari r_1 diperbesar sehingga jari-jarinya menjadi r_2 dengan $r_2 > r_1$. Berlaku:

$$\begin{aligned}
V_2 - V_1 &= \frac{4}{3}\pi(r_2^{\,3} - r_1^{\,3}) \\
&= \frac{4}{3}\pi(r_2^{\,3} - r_1^{\,3})
\end{aligned}$$

Jadi selisih volumenya:

$$\boxed{V_2 - V_1 = \frac{4}{3}\pi(r_2^{\,3} - r_1^{\,3})}$$

dengan r_1 = jari-jari awal

r_2 = jari-jari setelah diperbesar

Bagaimana jika jari-jari bola diperpanjang sebesar k satuan? Ternyata berlaku $r_2 = r_1 + k$, sehingga:

$$\begin{aligned}
V_2 - V_1 &= \frac{4}{3}\pi r_2^{\,3} - \frac{4}{3}\pi r_1^{\,3} \\
&= \frac{4}{3}\pi(r_1 + k)^3 - \frac{4}{3}\pi r_1^{\,3} \\
&= \frac{4}{3}\pi(r_1^{\,3} + 3r_1^{\,2}k + 3\,r_1k^2 + k^3) - \frac{4}{3}\pi r_1^{\,3} \\
&= \frac{4}{3}\pi(r_1^{\,3} + 3r_1^{\,2}k + 3r_1k^2 + k^3 - r_1^{\,3}) \\
&= \frac{4}{3}\pi k(3r_1^{\,2} + 3r_1k + k^2)
\end{aligned}$$

$\frac{4}{3}$

Jadi selisih volumenya:

$$\boxed{V_2 - V_1 = \frac{4}{3}\pi k(3r_1^{\,2} + 3r_1k + k^2)}$$

dengan k = perpanjangan jari-jari

Contoh 2.6

1. Sebuah bola dengan jari-jari 4 cm diperbesar sehingga jari-jarinya menjadi 7 cm. Berapa selisih volume sebelum dengan sesudah diperbesar?

Penyelesaian:

$$V_2 - V_1 = \frac{4}{3}\pi(r_2^{\,3} - r_1^{\,3})$$

$$= \frac{4}{3} \times 3{,}14(7^3 - 4^3)$$

$$= \frac{4}{3} \times 3{,}14(343 - 64)$$

$$= \frac{4}{3} \times 3{,}14 \times 279$$

$$= 1.168{,}08 \text{ cm}^3$$

2. Volume sebuah kerucut adalah 3.043,5 cm^3 dengan jari-jari 20,37 cm dan tinggi 7 cm. Berapakah jari-jari kerucut agar volume kerucut menjadi 5.203 cm^3 dengan tinggi yang tetap?

Penyelesaian:

$$V_2 - V_1 = \frac{1}{3}\pi(r_2^{\,2} - r_1^{\,2})t$$

$$5.203 - 3.043{,}5 = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (r_2^{\,2} - 415{,}02) \times 7$$

$$2.159{,}5 = \frac{22}{3} \times (r_2^{\,2} - 415{,}02)$$

$$\frac{2.159{,}5 \text{x} 3}{22} = r_2^{\,2} - 415{,}02$$

$$294{,}48 = r_2^{\,2} - 415{,}02$$

$$r_2^{\,2} = 709{,}5$$

$$r_2 = 26{,}64 \text{ cm}$$

Jari-jari kerucut harus diperbesar 6,27 cm.

Latihan 2.5

1. Jari-jari sebuah bola adalah 21 cm. Jika jari-jari bola yang lain x, dengan x lebih panjang dari jari-jari bola pertama dan volume bola kedua 49.347 cm^3. Tentukan:
   a. jari-jari bola kedua (x),
   b. seluruh volume kedua bola.
2. Jari-jari sebuah kerucut 5 cm tinggi 17 cm. Sebuah kerucut lain dengan jari-jari lingkaran alasnya $\frac{2}{3}$ dari jari-jari lingkaran alas kerucut pertama dan tinggi $\frac{1}{3}$ dari kerucut pertama. Tentukan:
   a. perbandingan volume kedua kerucut,
   b. selisih volume kedua kerucut.
3. Sebuah kerucut dengan tinggi h dan jari-jari r, di dalamnya terdapat lubang yang berbentuk kerucut dengan jari-jari $\frac{1}{2}$ r dan tinggi $\frac{1}{2}$ h. Berapakah luas permukaan tabung tersebut?
4. Tabung dengan tinggi $t = 9$ cm. Diisi dengan air sampai penuh. Setelah air dipakai maka volume air menjadi $\frac{4}{3}$ dari volume semula. Jika Lata ingin memindahkan air yang tersisa ke tabung lain sehingga penuh, berapa jari-jari tabung tersebut?
5. Sebuah kue tart berbentuk silinder dengan diameter 18 cm dan tinggi 25 cm. Kue tersebut diselimuti coklat sehingga volumenya menjadi 11.012,53 cm^3. Hitunglah jari-jari kue setelah dilapisi coklat.
6. Diberikan kerucut dengan diameter 14 cm dan tinggi 19 cm. Agar sebuah bola dengan jari-jari 7 cm dapat masuk ke dalam kerucut sehingga menyinggung selimut dan alas kerucut, maka bola diperkecil. Hitunglah diameter bola yang dikecilkan dan perbandingan volume bola sebelum dengan sesudah dikecilkan?
7. Sebuah pipa mempunyai panjang 3,5 m, jari-jari luar 7 cm, dan jari-jari dalam 4,5 cm. Berapa volume pipa tersebut?
8. Sebuah bandul berbentuk kerucut dengan jari-jari alasnya 7 cm dan tingginya kerucut 24 cm. Hitunglah:
   a. luas bandul,
   b. berat bandul, jika 1 cm^3 = 5 gram.

9. Selimut dari sebuah kerucut dibuat dari karton berbentuk setengah lingkaran. Jika luas karton 77 cm^2. Hitunglah:
   a. jari-jari alas kerucut,
   b. luas kerucut.
10. Perbandingan luas kulit bola dari dua buah bola berturut-turut adalah $L_1 : L_2 = 1 : 9$. Berapakah perbandingan volume kedua bola tersebut?

Rangkuman

1. Luas selimut tabung : $L = 2\pi r (r + t)$
   Volume : $V = \pi r^2 t$
2. Luas selimut kerucut : $L = \pi r (s + r)$
   Volume : $V = \frac{1}{3} \pi r^2 t$
3. Luas selimut bola : $L = 4\pi r^2$
   Volume : $V = \frac{4}{3} \pi r^2$
4. Hubungan volume bangun ruang sisi lengkung dengan jari-jari
   a. Perbandingan volume
      1) Perbandingan volume tabung
         $V_1 : V_2 = r_1^2 : r_2^2$
      2) Perbandingan volume kerucut
         $V_1 : V_2 = r_1^2 : r_2^2$
      3) Perbandingan volume pada bola
         $V_1 : V_2 = r_1^3 : r_2^3$
   b. Selisih volume dua bangun ruang
      1) Tabung
         $V_2 - V_1 = \pi (r_2^2 - r_1^2)t$
      2) Kerucut
         $V_2 - V_1 = \frac{1}{3} \pi (r_2^2 - r_1^2)t$
      3) Bola
         $V_2 - V_1 = \frac{1}{4} \pi (r_2^3 - r_1^3)t$

Uji Kompetensi

A. Pilihlah satu jawaban yang paling benar dengan cara memberi tanda silang (X) pada huruf *a, b, c,* atau *d*!

1. Luas selimut tabung yang panjang diameter alasnya 46 cm dan tinggi 7 cm adalah . . . .
   - a. 1.412 cm² c. 1.000 cm²
   - b. 1.012 cm² d. 942 cm²

   a. 1.412 cm^2 c. 1.000 cm^2
   b. 1.012 cm^2 d. 942 cm^2

2. Diketahui luas selimut sebuah tabung adalah 2.200 cm^2. Jika tinggi tabung 25 cm dan $\pi = \frac{22}{7}$, maka luas permukaan tabung itu adalah . . . .

   a. 3.432 cm^2 c. 2.239 cm^2
   b. 3.234 cm^2 d. 2.214 cm^2

3. Volume tabung yang ukuran diameternya 10 cm, tinggi 8 cm, dan $\pi = 3{,}14$ adalah . . . .

   a. 721 cm^3 c. 586 cm^3
   b. 628 cm^3 d. 436 cm^3

4. Luas selimut kerucut yang berjari-jari 14 cm, tinggi 15 cm, dan $\pi = \frac{22}{7}$ adalah . . . .

$\frac{22}{7}$

   a. 1.034 cm^2 c. 880 cm^2
   b. 902 cm^2 d. 785 cm^2

5. Sebuah kerucut diameternya 18 cm dan tingginya 10 cm ($\pi = 3{,}14$). Volume kerucut = ...

   a. 384,0 cm^3 c. 791,4 cm^3
   b. 643,8 cm^3 d. 847,8 cm^3

6. Suatu kerucut dibentuk dari selembar aluminium yang berbentuk setengah lingkaran dengan diameter 42 cm. Untuk $\pi = \frac{22}{7}$, maka panjang jari-jari lingkaran alas kerucut adalah . . . .

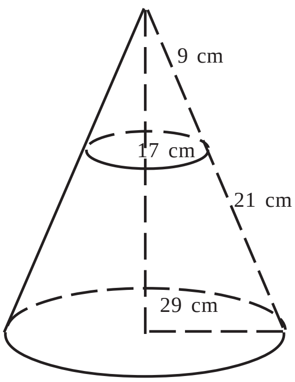
   a. 8,6 cm c. 10,5 cm
   b. 10 cm d. 11,6 cm

7. Sebuah bola besi dimasukkan ke dalam tabung yang penuh berisi air. Jari-jari tabung sama dengan jari-jari bola, yaitu 10 cm. Sedangkan tinggi tabung 19 cm. Jika π = 3,14, maka sisa air di dalam tabung sesudah bola dimasukkan adalah . . . .

   a. 3.380,70 cm^3 c. 1.797,33 cm^3

   b. 2.742 cm^3 d. 1.779,33 cm^3

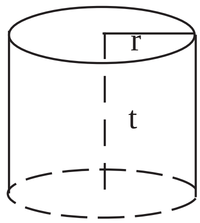
8. Gambar di samping menunjukkan sebuah kap lampu berbentuk kerucut terpancung. Luas bahan yang digunakan untuk membuat kap lampu itu adalah . . . .



   a. 2.251,38 cm^2
   b. 3.033,24 cm^2
   c. 4.903,54 cm^2
   d. 5.742,03 cm^2

9. Pernyataan tentang tabung berikut yang benar adalah . . . .
   a. mempunyai 3 buah rusuk
   b. mempunyai 2 bidang sisi
   c. bidang alas dan bidang atas berupa daerah lingkaran yang sejajar dan kongruen
   d. panjang jari-jari lingkaran atas kurang dari panjang jari-jari lingkaran alas

10. Perhatikan gambar berikut ini.



   Luas permukaan tabung tersebut adalah . . . .
   a. $2\pi r\ (r + \mathrm{t})$
   b. $\pi r^2 t$
   c. πrt
   d. $2\pi\mathrm{rt}$

11. Luas selimut tabung yang panjang jari-jarinya 17 cm dan tinggi 23 cm adalah . . . .
   a. 6.743,67 cm^2
   b. 5.744,76 cm^2
   c. 5.734,67 cm^2
   d. 4.745,80 cm^2

12. Keliling alas sebuah tabung adalah 24 cm dan tinggi tabung 15 cm. Untuk $\pi = \frac{22}{7}$, maka luas selimut tabung tersebut adalah . . . .

a. 230,45 cm^2 c. 423,20 cm^2

b. 360 cm^2 d. 575 cm^2

13. Jika tinggi tabung adalah 19 cm dan panjang jari-jari lingkaran alas tabung adalah 9 cm, maka luas permukaan tabung adalah . . . .

a. 1.584 cm^2 c. 928,4 cm^2

b. 1.747 cm^2 d. 871,82 cm^2

14. Ditentukan kerucut dengan tinggi 8 cm dan jari-jari alasnya 6 cm. Untuk π = 3,14, maka luas seluruh permukaan kerucut tersebut adalah . . . .

a. 301,44 cm^2 c. 113,04 cm^2

b. 188,40 cm^2 d. 100,48 cm^2

15. Sebuah bola dimasukkan ke dalam tabung. Diameter bola sama dengan diameter tabung, yaitu 12 cm, tinggi tabung 20 cm, dan π = 3,14. Volume tabung di luar bola adalah . . . .

a. 523,33 cm^3 c. 1.177,5 cm^3

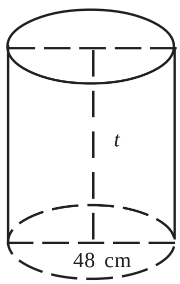
b. 654,17 cm^3 d. 1.226,08 cm^3

$\frac{22}{7}$

B. Jawablah pertanyaan-pertanyaan di bawah ini dengan benar!

1. Bangun ruang apakah yang memiliki sebuah bidang (sisi) lengkung, tetapi tidak mempunyai titik sudut maupun rusuk?

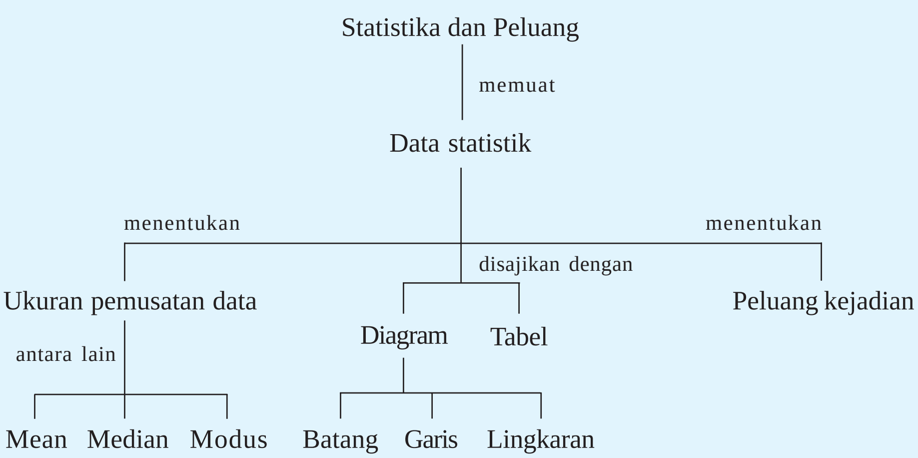
2. Jika luas selimut tabung di samping ini adalah 1.980 cm^2 dan $\pi = \frac{22}{7}$, berapakah tinggi tabung tersebut?



3. Panitia suatu acara akan membuat tenda berbentuk kerucut (tanpa alas) dari kain parasut. Tenda yang akan dibuat memiliki diameter 14 m dan tinggi 9 m. Apabila biaya pembuatan tenda tiap m^2 adalah Rp12.000,00, berapakah biaya yang harus disediakan untuk membuat tenda itu?
4. Jika panjang jari-jari kerucut A adalah 2 kali panjang jari-jari kerucut B dan tinggi kerucut A sama dengan tinggi kerucut B, berapakah volume kerucut A dengan volume kerucut B?
5. Volume sebuah kerucut sama dengan volume sebuah bola. Jika panjang jari-jari alas kerucut sama dengan panjang jari-jari bola, yaitu *r*, dan tinggi kerucut adalah *t*, berapakah *t*?

BAB III
STATISTIKA DAN PELUANG

Peta Konsep



Kata Kunci

1. Statistika
2. Data
3. Populasi
4. Sampel
5. Diagram
6. Tabel
7. Mean
8. Median
9. Modus
10. Peluang
11. Frekuensi relatif

Sumber: www.media-indonesia.com
Gambar 3.1 Dalam ulangan, nilai yang diperoleh beraneka ragam

Dalam bab ini kita akan mempelajari statistika dan peluang, dalam kehidupan sehari-hari, kita sering menggunakan pengetahuan ini. Misalnya dalam suatu remedial ulangan harian pada mata pelajaran matematika yang diikuti oleh 10 siswa, 2 orang memperoleh nilai 80, 4 orang memperoleh nilai 75, 3 orang mendapat nilai 70 dan 1 orang mendapat nilai 6. Tahukah kalian berapa rata-rata nilai yang diperoleh dari kesepuluh siswa tersebut? Nilai berapa yang banyak diperoleh siswa? Tentu kalian ingin mengetahui bagaimana caranya bukan? Untuk itu, marilah kita mempelajari statistika dan peluang dengan saksama berikut ini.

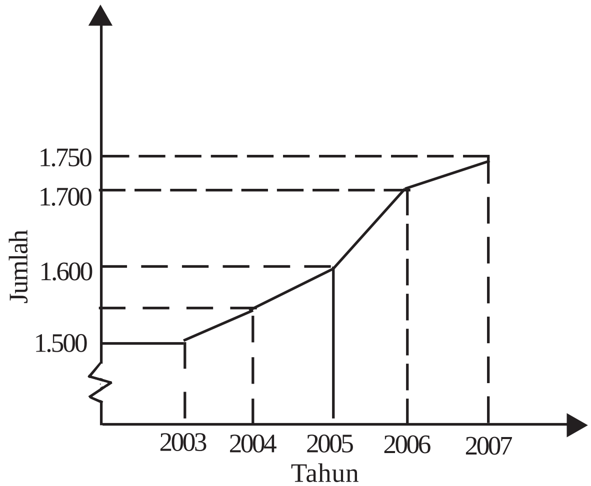
Setelah mempelajari bab Statistika dan Peluang ini diharapkan kalian dapat menentukan rata-rata, median, modus suatu data tunggal, serta dapat menafsirkannya. Selain itu kalian dapat menyajikan data dalam bentuk tabel dan diagram batang, garis, dan lingkaran. Dalam mempelajari materi peluang, diharapkan kalian dapat menentukan ruang sampel suatu percobaan serta dapat menentukan peluang suatu kejadian sederhana. Dengan begitu, kalian akan dapat menerapkan dalam kehidupan sehari-hari.

A. Data Statistik

Secara langsung atau tidak langsung kita sering menggunakan statistika. Meskipun demikian banyak orang yang belum mengetahui dan memahami makna statistika yang sebenarnya.

1. Pengertian Data dan Statistik

Sebelum memelajari lebih lanjut, alangkah baiknya jika kita mengenal istilah-istilah yang digunakan. Sekarang coba temukan informasi apa yang kalian peroleh dari gambar berikut ini?



Gambar 3.2 Diagram pertumbuhan penduduk suatu desa

1) ....
2) ....
3) ....
4) ....

Dari kegiatan di atas, kita memperoleh beberapa informasi terkait dengan gambar 3.1 tersebut. Kumpulan keterangan atau informasi yang diperoleh dari suatu pengamatan itulah yang disebut dengan data atau data statistik. Data dapat berupa bilangan, yang disebut data kuantitatif, atau berupa kategori (atribut), seperti rusak, baik, berhasil, gagal, yang disebut dengan data kualitatif.

Statistika adalah pengetahuan yang berhubungan dengan cara-cara pengumpulan data, pengolahan, penganalisisan, dan penarikan kesimpulan berdasarkan data. Sedangkan statistik sendiri merupakan kumpulan data, baik bilangan maupun non-bilangan yang disusun dalam tabel dan atau diagram yang menggambarkan atau memaparkan suatu masalah.

Secara umum, statistika dibagi menjadi dua fase, yaitu:

a. Statistika deskriptif, yaitu fase statistika yang hanya meliputi kegiatan-kegiatan mengumpulkan data, menyusun, dan menggambarkan data dalam bentuk tabel atau grafik, serta menganalisis data yang diperoleh tanpa menarik kesimpulan terhadap populasi secara umum.

b. Statistika induktif atau inferensi, yaitu fase statistika lebih lanjut di mana data yang diperoleh dianalisis agar diperoleh kesimpulan terhadap populasi secara umum.

2. Pengumpulan Data

Dalam pengumpulan data, khususnya data kuantitatif, kita dapat menggunakan dua cara atau kategori, yaitu:

a. Data Cacahan

Data cacahan atau data yang diperoleh dengan cara menghitung atau mencacah.

Misalnya: dalam suatu kelas terdiri dari 20 siswa perempuan dan 15 siswa laki-laki.

b. Data Ukuran

Data ukuran atau data kontinu yaitu data yang diperoleh dengan cara mengukur.

Misalnya: nilai ulangan harian matematika dari lima orang siswa yaitu 75, 63, 81, 86, dan 90.

Latihan 3.1

1. Dari data-data berikut ini, manakah yang merupakan data kualitatif dan manakah yang merupakan data kuantitatif?
   a. Banyak korban bencana banjir di Sulawesi Selatan.
   b. Makanan kesukaan siswa kelas IX SMP Budi Luhur.
   c. Jenis olahraga yang paling digemari.
   d. Ukuran sepatu siswa kelas VII SMP Budi Luhur.
   e. Nilai rata-rata hasil Ujian Akhir Nasional di SMP Bhinneka Nasional.
2. Lakukanlah pengumpulan data tentang berat badan teman-teman di kelasmu dengan cara mengukur, yaitu menimbang berat badannya.
3. Lakukanlah pengumpulan data tentang jenis olahraga yang paling digemari dengan cara mencatat dengan *tally* (turus) pada tabel berikut ini.

No.	Jenis Olah Raga	Turus	Jumlah
1.	Sepak Bola	....	....
2.	Badminton	....	....
3.	Basket	....	....
4.	Renang	....	....
5.	Tenis meja	....	....
6.	Sepak takraw	....	....
		Jumlah	

4. Lakukanlah pengumpulan data tentang banyak saudara kandung yang dimiliki teman-teman di kelasmu dengan cara berikut ini.
   a. Sebutlah angka dari 0 sampai 10 secara berurutan. Mintalah kepada teman sekelasmu untuk mengangkat jari tangannya jika angka yang kalian sebutkan sama dengan jumlah saudaranya.
   b. Dengan cara membilang, kumpulkanlah data tersebut.

5. Lakukanlah pengumpulan data tentang nilai rapor teman-teman di kelasmu pada waktu di kelas VIII semester 2 untuk mata pelajaran matematika, dengan cara mencatat dengan tally atau turus pada tabel di bawah ini.

No.	Nilai	Tally atau Turus	Jumlah
1.	4	....	....
2.	5	....	....
3.	6	....	....
4.	7	....	....
5.	8	....	....
		Jumlah	

3. Mengurutkan Data

Jika data yang kita peroleh dalam jumlah kecil, kita masih bisa mengolah atau menganalisisnya dengan mudah. Tetapi apabila data yang terkumpul dalam jumlah banyak dan tidak teratur urutannya, maka kita akan mengalami kesulitan untuk menganalisisnya. Oleh karena itu kita perlu melakukan pengurutan data. Mengurutkan data biasanya dilakukan dengan mencatat banyaknya (frekuensi) nilai data-nilai data yang sama kemudian diurutkan dari nilai yang terkecil (minimum) ke nilai yang tertinggi (maksimum).

Untuk lebih jelasnya perhatikan kegiatan berikut ini.

Latihan 3.2

1. Diberikan data banyaknya butir telur yang terjual dari 44 toko di Pasar Gede per harinya adalah:

46	70	46	46	50	56	75	71	60	71	92
56	71	50	75	46	56	71	65	92	70	70
87	71	61	46	56	87	70	46	63	70	61
92	75	50	56	69	70	87	71	60	46	75

2. Isikan jumlah masing-masing banyak telur terjual pada tabel berikut.

Jumlah Terjual	Banyak Toko (frekuensi)
70	5
46	.....
50	.....
56	.....
75	.....
71	.....
87	.....
92	.....

3. Selanjutnya urutkan dalam "jumlah terjual" dari nilai kecil ke besar, sedangkan frekuensi mengikuti.

Jumlah Terjual	Banyak Toko (frekuensi)
46	.....
50	.....
56	.....
70	.....
71	.....
75	.....
87	.....
92	.....

Dari kegiatan di atas dapat ketahui bahwa minimal telur terjual sebanyak 45 kg/hari dan maksimal terjual sebanyak 92 kg/hari. Dalam hal ini 45 merupakan nilai minimal atau data terendah dan 92 merupakan nilai maksimal atau data terbesar atau tertinggi.

Dalam statistika, jika ada n buah data dengan urutan x_1, x_2, x_3, ... , x_n ; maka nilai data terkecil disebut **statistik minimum** ($x_{min} = x_1$) dan data terbesar atau tertinggi disebut

statistik maksimum ($x_{max} = x_n$). Nilai statistik maksimum dan statistik minimum disebut statistik esktrim. Sedangkan selisih dari statistik maksimum dengan statistik minimum disebut **jangkauan** (R), dengan $R = x_{max} - x_{min}$.

Contoh 3.1

Diberikan data sebagai berikut.

7, 4, 3, 9, 13, 10, 8, 7, 3, 6, 8, 15

Tentukan jangkauan data di atas.

Penyelesaian:

Langkah pertama adalah mengurutkan data.

3, 3, 4, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 10, 13, 15.

Setelah diurutkan, diperoleh:

Statistika maksimum (x_{min}) = 15

Statistika minimum (x_{max}) = 3

Jangkauan (R) = $x_{max} - x_{min}$ = 15 – 3 = 12

Latihan 3.3

1. Diberikan data: 21, 24, 27, 24, 25, 29, 23, 21, 27, 24, 21, 21, 25.
   Setiap nilai data tersebut ditambah 4 kemudian dibagi 3. Carilah statistik ekstrim dan jangkauan data baru.
2. Hasil pengukuran berat badan dari 20 siswa SMP maju sebagai berikut.

37	40	45	40	38	45	44	44	35	40
35	44	37	40	45	35	44	38	37	40

   Buatlah tabel frekuensi kemudian tentukan jangkauannya.
3. Urutkanlah setiap data berikut ini, kemudian tentukanlah nilai terbesar, nilai terkecil, dan jangkauan data tersebut.
   a. 4 3 7 6 5 4 8 1 7 6
   b. 8 9 10 10 12 6 13 15 7 8
   c. 14 15 20 18 15 16 14 22 20 15 14 13
   d. 24 20 16 17 25 30 34 32 36 24 20 17
   e. 25 30 40 35 23 30 36 42 40 26 27 24

4. Diketahui suatu data: $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$. Jika dibuat data baru dan setiap data dikalikan dengan k dan ditambah t, berapakah nilai terkecil, nilai terbesar, serta jangkauan data yang baru?
5. Buatlah kesimpulan apa yang kalian peroleh setelah mengerjakan soal-soal di atas.

B. Ukuran Pemusatan Data

Ukuran pemusatan data atau ukuran tendensi tunggal yang mewakili data ada tiga buah yaitu mean, median, dan modus.

1. Mean ($\overline{x}$)

Mean adalah rata-rata hitung suatu data. Mean dihitung dengan cara membagi jumlah nilai data dengan banyaknya data. Mean atau rata-rata hitung disebut juga rataan atau rata-rata.

Misalnya $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ adalah nilai data-nilai data dari sekumpulan data yang banyaknya n buah, maka rata-ratanya adalah:

$$\text{Mean} = \overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

atau

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

dengan:

$\overline{x}$ = rata-rata dibaca "x bar "

n = banyaknya data

x_n = nilai data ke-i, ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$)

$\sum_{i=1}^{n} x_i$ = jumlah semua nilai data

Untuk data kelompok, mean dapat dicari dengan:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

dengan:

= rata-rata dibaca "x bar "

k = banyak kelompok

f_i = frekuensi kelompok ke-i, (i = 1, 2, … , k)

x_i = nilai kelompok ke-i

Contoh 3.2

1. Diberikan nilai ulangan lima orang siswa pada mata pelajaran matematika dan fisika.

	Dina	Ipul	Budi	Vivi	Tini
Matematika	8	10	7	8	6
Fisika	7	9	8	6	8

Dari tabel di atas, pelajaran apakah yang lebih dipahami, matematika atau fisika?

Penyelesaian:

Rata-rata nilai matematika $= \dfrac{8+10+7+8+6}{5}$

$= \dfrac{39}{5} = 7{,}7$

Rata-rata nilai fisika $= \dfrac{7+9+8+6+8}{5}$

$= \dfrac{38}{5} = 7{,}6$

Karena rata - rata nilai matematika lebih tinggi dari rata-rata nilai fisika, maka hal ini menunjukkan bahwa siswa lebih memahami mata pelajaran matematika.

2. Diberikan data tinggi bibit pohon adenium.

Tinggi	Frekuensi
12	3
10	4
9	6
8	5

Dari data tinggi bibit pohon adenium tersebut, berapa rata-rata tinggi bibit tersebut? (dalam cm)

Penyelesaian:

$$\bar{x} = \frac{(12\times 3)+(10\times 4)+(9\times 6)+(8\times 5)}{3+4+6+5} = \frac{170}{18} = 9{,}4 \text{ cm.}$$

Jadi tinggi rata-rata dari bibit pohon adenium adalah 9,4 cm.

Latihan 3.4

1. Tentukan jangkauan dan rata-rata data tunggal 4, 6, 2, 7, 11, 3.
2. Jumlah maksimum ekspor kepala sawit suatu negara sebesar 56.000 ton dan jumlah minimumnya 31.550 ton. Berapakah range dari ekspor kelapa sawit tersebut?
3. Tentukan rata-rata hitung dari data:
   a. 6, 5, 9, 7, 8, 8, 7, 6
   b. 6, 8, 5, 1, 6, 8, 5, 9, 6, 6, 8, 7
4. Setelah dilakukan ujian matematika, diperoleh nilai sebagai berikut.
   7, 8, 9, 6, 8, 6, 9, 7, 8, 9
   10, 5, 7, 9, 8, 6, 6, 8, 9, 7
   7, 6, 9, 8, 7, 6, 8, 9, 6, 8
   Jika siswa yang dinyatakan lulus adalah yang mempunyai nilai di atas rata-rata, tentukan jumlah siswa yang tidak lulus.
5. Rata-rata nilai dari 40 anak adalah 8,6. Jika dua anak keluar dari kelompok tersebut, rata-rata nilai itu menjadi 8,5. Berapakah jumlah nilai kedua anak tersebut?

2. Median (*Me*)

Median adalah nilai tengah dalam sekumpulan data, setelah data tersebut diurutkan. Cara menentukan median dari data tunggal yaitu sebagai berikut.

Misalnya $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah data yang telah diurutkan dari nilai terkecil sampai terbesar sehingga diperoleh urutan data $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$.

a. *Data Ganjil*

Untuk banyaknya data ganjil (n ganjil) maka median adalah nilai data ke $\frac{n+1}{2}$ yaitu:

$$Me = \frac{Xn+1}{2}$$

b. *Data Genap*

Untuk banyaknya data genap (n genap) maka median adalah nilai rata-rata dari nilai data ke , dengan data ke . $\frac{1}{2}(n+1)$.

$$Me = \frac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n+1}{2}}\right)$$

c. *Data Kelompok*

Untuk data kelompok, median atau nilai tengahnya dapat dihitung dengan:

$$Me = L + \left(\frac{\frac{n}{2} - f_k}{f_{Med}}\right) \cdot c$$

Dengan:

Me = median (nilai tengah)

L = tepi bawah kelas median

f_k = jumlah frekuensi kelas sebelum kelas median

f_{Med} = frekuensi kelas median

c = interval kelas

Contoh 3.3

Diberikan data 7, 6, 11, 5, 8, 9, 13, 4, 10. Berapakah median dari data tersebut?

Penyelesaian:

Data diurutkan dari kecil ke besar: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13

Banyaknya data (n) = 9 (ganjil)

Maka median dari data adalah:

$$Me = \frac{x_n + 1}{2}$$

$$\frac{x_9 + 1}{2}$$

$$= x_5 = 8$$

Jadi median dari data di atas adalah 8.

3. Modus (*Mo*)

Modus didefinisikan sebagai nilai data yang paling sering atau paling banyak muncul atau nilai data yang frekuensinya paling besar.

Untuk menentukan modus dari data tunggal, kita cukup mengurutkan data tersebut, kemudian mencari nilai data yang frekuensinya paling besar.

Untuk data kelompok, skor/nilai modus ditentukan dengan rumus:

$$Mo = T_b + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \cdot c$$

Dengan:

Mo = modus

T_b = tepi bawah kelas modus

d_1 = selisih frekuensi kelas modus dengan kelas sebelumnya

d_2 = selisih frekuensi kelas modus dengan kelas sesudahnya

c = panjang interval kelas

Contoh 3.4

1. Tentukan modus dari data berikut 3, 6, 4, 4, 5, 3, 4, 7, 3, 2.

   Penyelesaian:

   Urutan data 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 7

   Nilai data yang banyak muncul adalah 3 dan 4, maka modus dari data tersebut adalah 3 dan 4.

2. Data dari pengukuran berat badan siswa kelas 3 diperoleh sebagai berikut.

   Tabel berat badan siswa kelas 3

Berat	Frekuensi
45	1
46	3
47	5
48	2
49	8
50	3

   Berapakah modus dari data pada tabel 3.3 di atas?

   Penyelesaian:

   Modus dari data tersebut adalah 49, sebab nilai data mempunyai frekuensi kemunculan paling banyak.

Latihan 3.5

1. Diberikan data sebagai berikut.

Skor TOEFL	450	395	370	425
Frekuensi	5	6	8	4

   Berapa rata-rata skor TOEFL dari data tersebut?

2. Nilai rata-rata ujian matematika dari 41 siswa adalah 65. Jika nilai Sinta yang ikut ujian susulan digabungkan dengan kelompok tersebut, maka nilai rata-rata dari ke 42 siswa menjadi 66. Berapa nilai Sinta tersebut?

3. Berat karung beras dalam kg dari 10 karung beras adalah
   0, 62, 75, 62, 70, 70, 60, 55, 70, 65.
   Jika setiap karung beras ditambah 5 kg beras kemudian dibagi menjadi dua karung, tentukan mean, median, dan modusnya.
4. Diberikan data laju pertambahan penduduk dalam suatu kecamatan di wilayah A.

83	85	75	84	105	88
91	70	85	81	102	92
95	100	86	89	95	78
84	80	89	82	79	90
84	95	82	85	120	70

   Buatlah tabel frekuensi dari data tersebut kemudian tentukan mean, median, dan modusnya.
5. Tentukan mean, modus, dan median untuk setiap data berikut ini.
   a. 6, 8, 4, 5, 7, 2, 5, 6, 6
   b. 10, 9, 8, 8, 9, 10, 7, 7, 6, 7, 10, 5
   c. 25, 26, 20, 24, 18, 31, 19, 20, 18, 20
   d. 28, 27, 29, 30, 25, 26, 24, 32, 23, 31
6. Berikut ini adalah data berat badan sepuluh orang siswa.
   35 kg, 38 kg, 37 kg, 40 kg, 45 kg, 36 kg, 37 kg, 38 kg, 39 kg, 37 kg
   Tentukanlah mean, modus, dan median untuk data berat badan siswa tersebut.

C. Penyajian Data Statistik

Untuk keperluan laporan atau analisis lebih lanjut, data yang telah dikumpulkan perlu disusun dan disajikan dalam bentuk visual yang jelas dan baik. Secara umum ada dua cara penyajian data, yaitu dengan tabel (daftar) dan diagram (grafik). Pada kesempatan ini kita berfokus pada penyajian data dengan menggunakan diagram atau grafik.

1. Diagram Lambang (Piktogram)

Piktogram adalah penyajian data statistik dengan menggunakan lambang-lambang. Biasanya digunakan untuk menyajikan data yang nilainya cukup besar dengan nilai-nilai data yang telah dibulatkan.

Gambar-gambar atau lambang-lambang yang digunakan dibuat semenarik mungkin, sehingga lebih jelas dan mampu mewakili jumlah tertentu untuk satu gambar dan lambang tersebut. Kelemahan dari diagram ini adalah kurang efisien tempat, serta sulit dalam penggambaran untuk nilai yang tidak penuh.

Contoh 3.5

Berikut merupakan tabel frekuensi dari data hasil panen jagung dari tahun 2000-2007 yang disajikan dalam diagram lambang (piktogram). Dalam hal ini satu kantong mewakili 200 ton jagung.

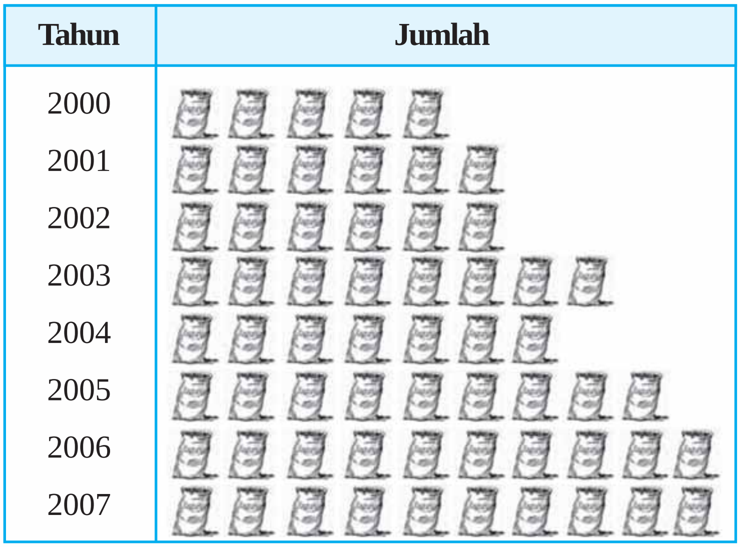
Penyelesaian:

Diberikan tabel hasil panen jagung sebagai berikut.

Tabel hasil panen jagung tahun 2000 – 2007

Tahun	Hasil Panen (dalam ton)
2000	1000
2001	1200
2002	1200
2003	1600
2004	1400
2005	1800
2006	2000
2007	2000

Tabel di atas dapat disajikan dalam bentuk diagram lambang sebagai berikut.



Keterangan:  = 200 ton

2. Tabel Frekuensi

Penyajian data tunggal dalam bentuk tabel disebut distribusi frekuensi data tunggal. Untuk mempermudah dalam membuat tabel frekuensi digunakan tally atau turus.

Contoh 3.6

Diberikan data sebagai berikut.

39	35	38	36	36	35	39	37	39	38
36	36	36	37	38	36	35	36	36	36
37	35	39	38	38	39	38	35	37	38

Buat tabel frekuensinya.

Tabel frekuensinya:

Berat badan	Tally	Frekuensi
35	~~||||~~	5
36	~~||||~~ ||||	9
37	||||	4
38	~~||||~~ ||	7
39	~~||||~~	5
Jumlah		30

3. Diagram Batang

Diagram batang biasanya berbentuk batang-batang vertikal (tegak) atau horisontal (mendatar), dengan alasnya menyatakan kategori dan tingginya menyatakan kuantitas dari kategori berikut. Diagram batang cocok digunakan jika variabel data berupa kategori.

Contoh 3.7

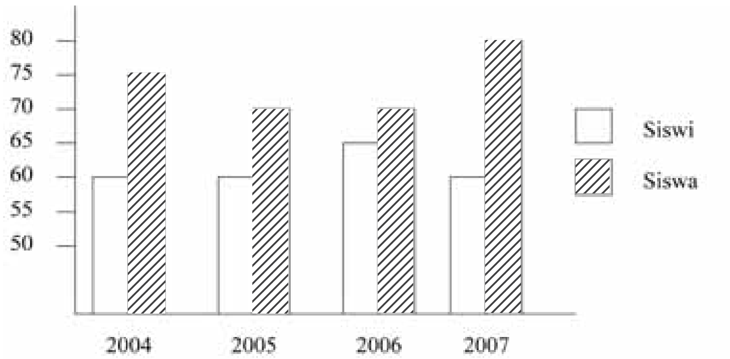
Diberikan data siswa baru tahun 2004 - 2007 suatu sekolah sebagai berikut.

Tahun	Siswa	Siswi	Jumlah
2004	60	75	135
2005	60	70	130
2006	65	70	135
2007	60	80	140

Gambarlah diagram batang untuk data tersebut.

Penyelesaian:

Gambar diagram batang untuk data di atas adalah sebagai berikut.



4. Diagram Garis (Poligon)

Diagram garis biasa digunakan untuk mengambarkan suatu data yang berkelanjutan dalam kurun waktu tertentu. Diagram garis terdiri atas sumbu datar dan sumbu tegak yang saling tegak lurus. Sumbu datar menyatakan waktu sedangkan sumbu tegak melukiskan / menunjukkan nilai data.

Contoh 3.8

Diberikan tabel penerimaan siswa baru SMP Maju Terus

Tahun	Jumlah Siswa
2003	1.500
2004	1.550
2005	1.600
2006	1.700
2007	1.750

Diagram garis dari data tersebut adalah:

5. Diagram Lingkaran

Diagram lingkaran merupakan salah satu bentuk penyajian yang berbentuk lingkaran, yang telah dibagi dalam sektor-sektor atau juring-juring. Tiap sektor melukiskan kategori data. Sebelum membuat diagram ini, terlebih dahulu kita mencari proporsi dari jumlah data keseluruhan, kemudian luas atau sudut pusat atau juring menyatakan proporsi untuk kategori tersebut.

Contoh 3.9

Diberikan data jumlah pasien pada Rumah Sakit Griya Husada sebagai berikut.

Sakit	Jumlah Pasien
Deman berdarah	150
TBC	70
Tifus	80
Jumlah	300

Data tersebut merupakan data pasien yang sakit di RS. Moga Sehat.

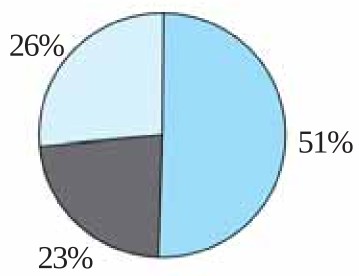
Buatkan diagram lingkarannya.

Penyelesaian:

Terlebih dahulu kita cari prosentase dari luasan yang diperlukan kategori.

Sakit	Jumlah Pasien	Persentase	Sudut Pusat Lingkaran
DB	150	$\frac{150}{300} \times 100\% = 50\%$	$\frac{150}{300} \times 360^o = 180^o$
TBC	70	$\frac{70}{300} \times 100\% = 23,33\%$	$\frac{70}{300} \times 360^o = 84^o$
Tifus	150	$\frac{50}{300} \times 100\% = 26,67\%$	$\frac{80}{300} \times 360^o = 90^o$

Selanjutnya data dari tabel tersebut dibuat diagram lingkaran



Latihan 3.6

1. Berikut ini adalah jarak terpilih 50 orang atlit lari dalam lomba lari tahunan.

30	23	40	30	30	35	35	23	40	37
23	30	45	40	35	40	23	40	45	35
40	37	30	25	40	35	23	45	37	35
45	25	35	45	45	37	40	35	35	37
37	35	37	37	47	30	37	39	30	30

Buatlah tabel frekuensi dari data di atas. Selanjutnya cari statistik ekstrim dan jangkauannya.

2. Berikut data banyak produksi gula merah dan gula pasir di pabrik tekstil.

Pabrik	Gula Merah	Gula Pasir
A	260	350
B	225	325
C	275	260

Dari tabel banyak produksi gula merah dan gula pasir di pabrik tekstil tersebut buatlah:

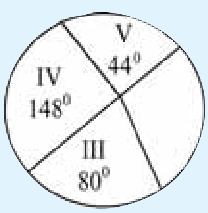
a. gambar diagram batangnya,

b. gambar diagram garis dan diagram lingkaran dari masing-masing produksi gula,

c. pabrik mana yang rata-rata produksi gulanya terbanyak?

3. Perhatikan diagram lingkaran di samping.

Dari 860 siswa lulusan SD yang diterima di SLTP digambarkan pada diagram tersebut. Tentukan banyak siswa diterima yang di SLTP II dan SLTP III.



4. Jelaskan keuntungan dari penggunaan:
   a. diagram lambang,
   b. diagram batang,
   c. diagram garis.
5. Hasil penjualan barang (dalam unit) selama tahun 2007 adalah sebagai berikut.

Jenis	Jumlah
Pompa air	40
Lemari es	25
Setrika	20
Televisi	18
Kipas angin	47
Rice cooker	30

   Dari data di atas, buatlah diagram lingkaran dan hitunglah persentase untuk pompa air.

D. Populasi dan Sampel

Jika kita melakukan penelitian maka kita memerlukan kumpulan objek yang akan kita teliti atau observasi. Kumpulan atau keseluruhan objek yang kita teliti inilah yang disebut **populasi**. Ketika populasi yang ditentukan mempunyai jumlah yang besar atau banyak, maka kita bisa mengambil sampel dimana sampel tersebut dapat mewakili karakteristik populasi apabila diambil kesimpulan. Cara pengambilan sampel disebut dengan teknik sampling. Teknik sampling yang sederhana dan biasa kita gunakan adalah secara acak atau random dengan melakukan undian.

Latihan 3.7

1. Perhatikan jumlah masing-masing siswa putra dan putri di setiap kelas di sekolah kalian.
2. Anggaplah sekolah kalian ingin melakukan penelitian kebiasaan belajar siswa kelas 3 di rumah.

3. Dari semua kelas 3 di sekolah kalian ambil satu kelas untuk kalian teliti. Boleh mengambil kelas kalian sendiri.
4. Tanyakan pada siswa-siswi di kelas yang kalian pilih tentang kebiasaan belajar mereka di rumah (cukup satu pertanyaan dengan jawaban selalu atau kadang-kadang, agar lebih mudah).
5. Dari data yang kalian peroleh buatlah kesimpulan mengenai hasil penelitian kalian.

Selanjutnya dari kegiatan tersebut, ternyata kita tidak melakukan penelitian dengan mengambil objek penelitian semua siswa kelas 3, tetapi kita hanya mengambil satu kelas untuk penelitian. Dalam statistika, keseluruhan objek penelitian, dalam hal ini semua siswa kelas 3, merupakan populasi. Sedangkan satu kelas yang kita ambil sebagai objek penelitian disebut sampel.

Contoh 3.10

Untuk menentukan berapa besar rata-rata pengeluaran biaya kesehatan dalam setiap keluarga di Kecamatan A dilakukan wawancara dan observasi pada 30 keluarga dari setiap status sosial secara acak. Tentukan populasi dan sampel dari penelitian tersebut.

Penyelesaian:

Populasi penelitian adalah setiap keluarga dari kecamatan A. Sampel penelitian adalah 30 keluarga dari setiap status sosial di kecamatan A.

Latihan 3.8

Tentukan populasi dan sampel dari penelitian berikut.

1. Untuk mengetahui tingkat pencemaran air minum di suatu daerah, dilakukan penelitian dengan mengambil beberapa galon air dan air sumur penduduk.
2. Dalam rangka untuk mengetahui motivasi belajar siswa SMP pada mata pelajaran matematika, maka dilakukan penelitian pada lima buah SMP diambil secara acak.
3. Untuk mengetahui kandungan unsur tembaga dalam sebuah danau yang sudah tercemar, dilakukanlah sebuah penelitian.

a. Tentukan populasinya.
b. Bagaimana cara pengambilan sampelnya?

4. Seorang guru matematika di SMP A ingin melakukan penelitian mengenai pengaruh pemberian kuis sebelum pelajaran matematika dimulai terhadap hasil belajar siswa. Tentukanlah:
   a. populasinya,
   b. sampelnya.
5. Petugas Departemen Kesehatan ingin meneliti kandungan zat pengawet yang terdapat dalam baso yang dijual pedagang di daerah A. Tentukanlah:
   a. populasinya,
   b. sampelnya.

E. Peluang

Dalam sebuah rapat kelas yang diikuti seluruh siswa yang berjumlah 42, dalam kelas tersebut akan dipilih seorang siswa untuk menjabat sebagai ketua OSIS. Tahukah kalian berapa besar kemungkinan masing-masing siswa terpilih sebagai ketua OSIS, dalam rapat tersebut? Dalam bab ini kita akan pelajari seberapa besar kemungkinan ataupun keyakinan dari sebuah kesimpulan dalam peluang.

1. Percobaan Statistika, Ruang Sampel, dan Titik Sampel

Pernahkah kalian melakukan permainan ular tangga? Dalam permainan ini kita menggunakan dadu. Dengan melakukan lemparan dadu maka kita boleh melangkah. Banyaknya langkah yang dijalankan tergantung dari mata dadu yang keluar. Ketika kita melakukan lemparan dadu maka kita telah melakukan percobaan. Kita tidak pernah tahu mata dadu mana yang akan keluar, tetapi kita tahu himpunan dari semua hasil yang muncul. Yang disebut ruang sampel (S) adalah himpunan yang anggotanya terdiri dari semua hasil yang mungkin muncul. Setiap anggota himpunan dari ruang sampel disebut titik sampel.

Contoh 3.11

Dalam sebuah pelemparan dadu dilakukan percobaan dengan pelemparan mata dadu. Tentukan ruang sampel dan titik sampelnya.

Penyelesaian:

Ruang sampel (S): {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Titik sampel: 1, 2, 3, 4, 5, dan 6

2. Menentukan Ruang Sampel Suatu Percobaan

Ada tiga cara yang biasa digunakan untuk menentukan ruang sampel suatu percobaan, yaitu:

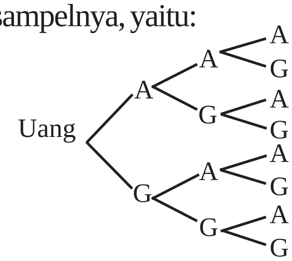
a. *Cara Mendaftar*

Seperti yang telah kita pelajari di atas, dalam percobaan melempar dadu bermata enam, kita tidak dapat memastikan mata dadu mana yang muncul. Tetapi himpunan mata dadu yang mungkin muncul dan anggota-anggota dari ruang sampel bisa kita ketahui. Ruang sampel dari dadu bermata enam adalah S = {1, 2, 3, 4, 5, 6) dan titik sampelnya adalah 1, 2, 3, 4, 5, dan 6. Jadi ruang sampel diperoleh dengan cara mendaftar semua hasil yang mungkin. Titik sampel adalah semua anggota dari ruang sampel.

b. *Diagram Pohon*

Misal dalam melakukan percobaan melempar sebuah mata uang logam sebanyak 3 kali, dengan sisi angka (A) dan sisi gambar (G).

Dari diagram pohon berikut kita dapat menuliskan dengan mudah ruang sampelnya, yaitu:



S = {AAA, AAG, AGA, AGG, GAA, GAG, GGA, GGG}

c. *Tabel*

Misal kita mempunyai uang logam dengan 2 kali pelemparan. Maka dengan tabel diperoleh:

Mata Uang Logam	**A**	**G**
A	(AA)	(AG)
G	(GA)	(GG)

Titik sampel: (AA), (AG), (GA), (GG)

Ruang sampel (S): {(AA), (AG), (GA), (GG)}

Dengan menggunakan diagram pohon dan tabel kita bisa mencari titik sampel dan ruang sampel dari dua buah alat atau lebih.

Latihan 3.9

1. Carilah ruang sampel dan titik sampel dari percobaan berikut.
   a. Percobaan pelemparan mata dadu dan uang logam.
   b. Percobaan memasangkan 2 pasang sepatu dan 3 pasang kaus kaki.
2. Dalam pelemparan satu buah mata dadu bermata enam, tentukan:
   a. ruang sampel dan titik sampel,
   b. titik sampel dengan jumlah 5,
   c. titik sampel dengan jumlah lebih dari 10,
   d. titik sampel dengan jumlah 13.
3. Pada pelemparan dua buah mata dadu secara bersama-sama, tentukan titik sampel dari keadaan berikut ini.
   a. Muncul mata dadu pertama bermata 5 dan dadu kedua bermata 4.
   b. Muncul mata dadu pertama bermata 6.
   c. Muncul mata dadu pertama sama dengan mata dadu kedua.
   d. Muncul mata dadu berjumlah 8.
4. Rika mempunyai dua buah kaleng yang berisi permen karet. Pada kaleng pertama terdapat permen karet berwarna merah, kuning, dan hijau. Sedangkan pada kaleng kedua terdapat permen karet berwarna putih dan biru. Jika Rika mengambil secara acak sebuah permen karet dari kaleng pertama dan sebuah permen karet dari kaleng kedua, tentukan ruang sampelnya.

5. Suatu kantong berisi kelereng berwarna merah, putih, dan hijau. Dua buah kelereng diambil secara acak satu demi satu. Jika setelah diambil kelereng-kelereng itu dikembalikan lagi, tentukanlah ruang sampelnya.

F. Menghitung Peluang Kejadian

1. Peluang pada Ruang Sampel

Pada percobaan melempar satu kali dadu bermata enam, dan kemungkinan mata dadu yang keluar ada enam buah, yaitu 1, 2, 3, 4, 5, 6; sebut saja ada 6 buah kejadian yang mungkin muncul. Jika A merupakan peristiwa muncul mata dadu 5, di mana mata dadu 5 merupakan salah satu kejadian dari enam kejadian yang mungkin muncul dari setiap pelemparan dadu. Jika dadu ituseimbang atau kondisi sama, maka peluang muncul 5 yaitu $\frac{1}{6}$.

Jika dituliskan dalam rumus, peluang terjadinya peristiwa A yang dilambangkan P(A) adalah:

$$P(\text{A}) = \frac{\text{banyak kejadian A}}{\text{banyak titik sampel pad ruang sampel S}} = \frac{n(\text{A})}{n(\text{S})}$$

Contoh 3.12

Pada pelemparan sebuah mata dadu, tentukan peluang munculnya:

a. mata dadu 3,

b. mata dadu prima.

Penyelesaian:

Kejadian yang mungkin muncul adalah mata dadu 1, 2, 3, 4, 5, dan 6 $\rightarrow n(\text{S}) = 6$.

a. Kejadian muncul mata dadu 3 ada 1 $\rightarrow n(3) = 1$

Jadi peluang muncul mata dadu 3 adalah

$$P\ (\text{mata } 3) = \cdot\ \frac{n(3)}{n(\text{S})} = \frac{1}{6}$$

b. Kejadian muncul mata dadu prima adalah 2, 3, dan 5.

n(prima) = 3

Jadi peluang muncul mata dadu prima adalah

$$P\ (\text{prima}) = \frac{n(\text{prima})}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

2. Peluang dengan Frekuensi Relatif

Jika kita melemparkan sebuah mata uang logam sebanyak 6 kali, ternyata muncul sisi gambar (G) sebanyak 3 kali, dan sisi angka (A) sebanyak 2 kali maka frekuensi relatif dari munculnya sisi gambar adalah $\frac{3}{6}$ = 0,5 dan frekuensi relatif dari munculnya sisi angka adalah $\frac{2}{6}$ = 0,33.

Jadi, jika ada percobaan sebanyak n kali, ternyata muncul kejadian A sebanyak n_1, kali dan B sebanyak n_2 kali sehingga ($n_1 + n_2 = n$), maka frekuensi relatif dari munculnya A adalah $\frac{n_1}{n}$ dan frekuensi relatif dari munculnya B adalah

Latihan 3.10

1. Sebuah dadu dilempar sekali. Tentukan peluang muncul mata dadu:
   a. 4,
   b. 6,
   c. komposit.
2. Dalam kotak terdapat kertas dengan nomor 1 sampai 10. Jika diambil sekali secara acak, tentukan peluang muncul:
   a. nomor 10,
   b. nomor 3,
   c. nomor 7.
3. Dalam pelemparan mata uang sebanyak 20 kali, ternyata muncul gambar sebanyak 12 kali. Tentukan:
   a. frekuensi relatif dari kejadian muncul sisi gambar,
   b. frekuensi relatif kejadian muncul sisi angka.

4. Sebuah dadu dilemparkan satu kali. Tentukan peluang muncul:
   a. mata dadu 2,
   b. mata dadu kurang dari 5,
   c. mata dadu bilangan prima,
   d. mata dadu kelipatan tiga.
5. Empat kartu As dikocok kemudian diambil satu secara acak. Tentukan peluang:
   a. terambilnya As wajik,
   b. terambilnya As berwarna hitam.
6. Suatu kantong berisi kelereng berwarna merah, kuning, putih, biru, dan hijau. Sebuah kelereng dari kantong itu diambil secara acak kemudian dikembalikan lagi. Tentukan peluang terambilnya:
   a. kelereng berwarna merah,
   b. kelereng berwarna putih.

Rangkuman

1. Ukuran pemusatan data
   a. Mean ($\bar{x}$) yaitu rata-rata hitung.

   $$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=i}^{n} x_i \qquad \frac{Xn+1}{2}$$

   b. Median (*Me*) nilai tengah dalam sekumpulan data setelah data tersebut diurutkan.
      1) Untuk data ganjil

      $$Me = \frac{Xn+1}{2}$$

      2) Untuk data genap

      $$Me = \frac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n+1}{2}}\right)$$

3) Untuk data kelompok

$$Me = L + \left(\frac{\frac{n}{2} - f_k}{f_{\text{Med}}} \right) - c$$

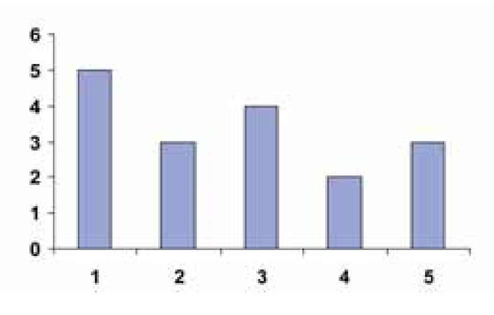
c. Modus (*Mo*) yaitu nilai data yang paling sering muncul atau nilai data yang frekuensinya paling besar.

2. Populasi adalah kumpulan atau keseluruhan objek yang kita teliti.
3. Cara menentukan ruang sampel suatu percobaan ada tiga cara, yaitu:
   a. cara mendaftar,
   b. diagram pohon,
   c. tabel.
4. Jika dituliskan dalam rumus, peluang terjadinya peristiwa A yang dilambangkan P(A) adalah:

$$P(A) = \frac{\text{banyak kejadian A}}{\text{banyak titik sampel pada ruang sampel S}} = \frac{n(A)}{n(S)}$$

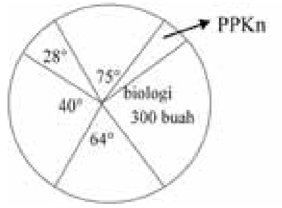
Uji Kompetensi

A. Pilihlah satu jawaban yang paling benar dengan cara memberi tanda silang (X) pada huruf *a, b, c,* atau *d*!

1. 

   Data yang sesuai dengan diagram di atas adalah . . . .
   a. 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5
   b. 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5
   c. 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5
   d. 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5

2. Perhatikan diagram berikut. Banyak buku pelajaran yang tersedia untuk mata pelajaran PPKn adalah . . . .



a. 164 buah
b. 172 buah
c. 210 buah
d. 330 buah

3. Mean dari data 4, 5, 6, 9, 5, 8, 10, 3, 7, 8, 2, 8 adalah . . . .

a. 6,0 c. 6,5
b. 6,25 d. 6,8

4. Nilai rata-rata dari tabel di bawah ini adalah . . . .

Nilai (*X*)	**Frekuensi (*f*)**
3	5
4	8
5	7
6	12
7	3

a. 8 c. 5
b. 7,5 d. 4,5

5. Nilai rata-rata tes matematika 15 siswa adalah 6,6. Bila nilai Dinda disertakan, maka nilai rata-rata menjadi 6,7. Nilai Dinda dalam tes matematika tersebut adalah . . . .

a. 7,6 c. 8,2
b. 7,8 d. 8,4

6. Diketahui data sebagai berikut: 24, 25, 22, 26, 29, 24, 32, 24, 22, 29, 25, 28, 27, 26, 28, 21, 32, 23, 21, 29, 32, 27.

Median dari data tersebut adalah . . . .

a. 25 c. 27
b. 26 d. 28

7. Dari hasil ulangan matematika selama semester 3, seorang anak mendapat nilai sebagai berikut : 5, 4½, 7, 8, 6, 4½, 7, 4, 7, 8, 7. Maka modus data tersebut adalah . . . .

a. 4,5 c. 7

b. 6 d. 6,5

8. Diberikan tabel frekuensi sebagai berikut.

Nilai (*x*)	**Frekuensi (*f*)**
5	2
6	3
7	8
8	4

Modus dari data di atas adalah . . . .

a. 5 c. 7

b. 6 d. 8

9. Dari tes kemampuan matematika di sebuah sekolah, diperoleh skor sebagai berikut.

40	55	30	75	65	70	85
50	65	30	60	55	80	65

Jangkauan skor di atas adalah . . . .

a. 85 c. 55

b. 75 d. 30

10. Kuartil di bawah dari data: 27, 49, 64, 40, 45, 27, 27 adalah . . . .

a. 49 c. 40

b. 64 d. 27

11. Pada percobaan lempar undi tiga uang logam sejenis secara bersamaan sebanyak satu kali, banyak titik sampel untuk satu angka dan dua gambar adalah . . . .

a. 2 c. 4

b. 3 d. 6

12. Peluang munculnya angka genap pada pelemparan dadu bersisi 6 adalah . . . .

a. $\frac{5}{6}$

b. $\frac{3}{6}$

c. $\frac{2}{6}$

d. $\frac{1}{6}$

13. Pada pelemparan dua buah uang logam, peluang tidak muncul gambar adalah . . . .

a. $\frac{1}{8}$

b. $\frac{1}{2}$

c. $\frac{1}{4}$

d. 1

14. Sebuah kantong berisi 24 kelereng hitam, 16 kelereng putih dan 8 kelereng biru. Bila sebuah kelereng diambil secara acak, maka peluang terambilnya kelereng hitam adalah . . . .

a. $\frac{6}{11}$

b. $\frac{3}{14}$

c. $\frac{3}{4}$

d. $\frac{1}{2}$

15. Sebuah dadu dilemparkan sebanyak 240 kali, maka frekuensi harapan munculnya bilangan prima adalah . . . .

a. 240

b. 120

c. 90

d. 150

B. Jawablah pertanyaan-pertanyaan di bawah ini dengan benar!

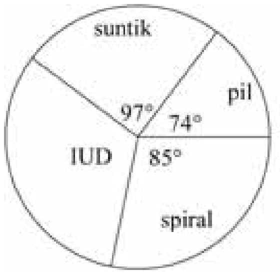
1. Nilai rapor Tuti pada semester I adalah sebagai berikut: 8, 9, 7, 7, 6, 5, 7, 8, 6, 9. Dari data nilai Tuti tersebut tentukan:

a. mean,

b. modus,

c. median.

2. Perhatikan diagram lingkaran berikut ini.



Jika jumlah pengikut keluarga berencana seluruhnya 630 orang, tentukan:

a. jumlah pengikut KB yang menggunakan IUD,

b. perbandingan banyaknya pengikut KB yang menggunakan pil dan IUD.

3. Pada percobaan melempar dua buah uang logam, hitunglah:

a. peluang muncul keduanya angka,

b. peluang tidak muncul angka,

c. peluang muncul muka yang sama.

4. Dari 40 siswa terdapat 15 orang gemar biologi, 25 orang gemar kimia, 5 orang gemar keduanya, dan sisanya tidak gemar keduanya. Bila dari semua siswa dipanggil satu-satu secara acak sebanyak 240 kali, tentukan:

a. harapan terpanggilnya kelompok siswa yang hanya gemar kimia,

b. harapan terpanggilnya kelompok siswa yang tidak gemar keduanya.

5. Tiga buah uang logam yang sejenis dilempar undi secara bersamaan sebanyak 120 kali. Tentukan:

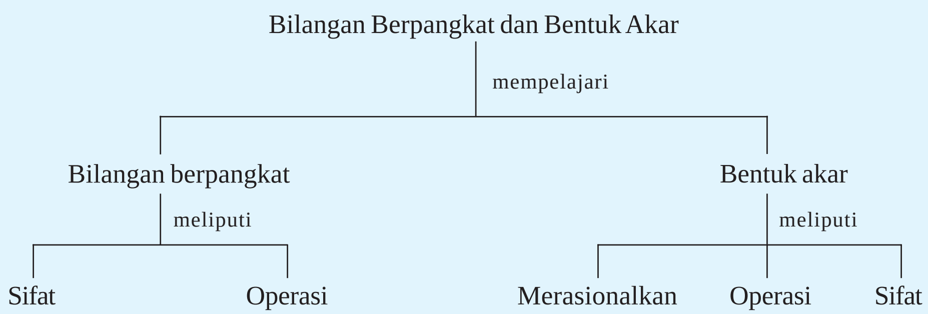
a. frekuensi harapan muncul paling sedikit satu muka uang,

b. frekuensi harapan muncul dua angka dan satu gambar.

BAB IV

BILANGAN BERPANGKAT DAN BENTUK AKAR

Peta Konsep



Kata Kunci

1. Pangkat
2. Akar
3. Sifat
4. Operasi
5. Merasionalkan
6. Akar sekawan

Sumber: www.tee-za.net

Gambar 4.1 Regu gerak jalan

Dalam suatu lomba gerak jalan, setiap regu terdiri dari 27 orang yang disusun menjadi 9 baris dan tiap baris terdiri dari 3 orang. Kemudian 9 baris tersebut dibagi menjadi 3 bagian dan tiap-tiap bagian terdiri dari 3 baris, yaitu bagian depan, tengah, dan belakang. Masing-masing bagian diberi jarak 1 baris. Hal ini dilakukan untuk memudahkan dewan juri dalam mengecek jumlah orang tiap regu. Jika tiap regu terdiri dari 3 bagian dan tiap bagian terdiri dari 3 baris, serta tiap baris terdiri dari 3 orang maka jumlah peserta dalam regu tersebut tepat 27 orang.

Untuk menuliskan jumlah tiap regu dalam permasalahan di atas, sebenarnya dapat dilakukan dengan cara yang lebih efektif dan efisien, yaitu dengan cara notasi bilangan berpangkat. Agar lebih memahami bilangan berpangkat dan bentuk akar, pelajarilah bab ini sehingga kalian dapat mengidentifikasi sifat-sifat bilangan berpangkat dan bentuk akar, melakukan operasi aljabar yang melibatkan bilangan berpangkat dan bentuk akar, serta dapat memecahkan masalah sederhana yang berkaitan dengan materi ini.

A. Bilangan Berpangkat Bilangan Bulat

Setiap manusia yang hidup pasti dia akan membutuhkan sesuatu atas dirinya seperti makan, bernafas, pakaian, tempat tinggal, dan lain-lain. Kebutuhan-kebutuhan manusia sebagian besar diperoleh tidak dengan cuma-cuma. Diperlukan sebuah usaha untuk mendapatkannya baik mencari, membeli, dan usaha-usaha yang lainnya.

Untuk membeli sebuah kebutuhan, kadang manusia harus mengeluarkan uang dalam jumlah besar. Misal untuk membeli rumah mewah manusia harus mengeluarkan uang sebesar 1 milyar rupiah. Jika dalam matematika 1 milyar dapat dituliskan dengan 1.000.000.000. Agaknya untuk menuliskan jumlah tersebut terlalu panjang, dapat juga dituliskan dalam bentuk baku yaitu 1×10^9. Nah, bilangan yang dituliskan sebagai 10^9 inilah yang disebut sebagai bilangan berpangkat. Dalam hal ini 10 disebut bilangan pokok, sedangkan 9 disebut bilangan pangkat. Karena pangkatnya bilangan bulat, maka disebut bilangan berpangkat bilangan bulat.

1. Bilangan Berpangkat Sederhana

Dalam kehidupan sehari-hari kita sering menemui perkalian bilangan-bilangan dengan faktor-faktor yang sama. Misalkan kita temui perkalian bilangan-bilangan sebagai berikut.

$2 \times 2 \times 2$

$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

$6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6$

Perkalian bilangan-bilangan dengan faktor-faktor yang sama seperti di atas, disebut sebagai perkalian berulang. Setiap perkalian berulang dapat dituliskan secara ringkas dengan menggunakan notasi bilangan berpangkat. Perkalian bilangan-bilangan di atas dapat kita tuliskan dengan:

$2 \times 2 \times 2 = 2^3$ (dibaca 2 pangkat 3)

$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$ (dibaca 3 pangkat 5)

$6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6^6$ (dibaca 6 pangkat 6)

Bilangan 2^3, 3^5, 6^6 disebut bilangan berpangkat sebenarnya karena bilangan-bilangan tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk perkalian berulang.

Bilangan berpangkat a^n dengan n **bilangan bulat positif** didefinisikan sebagai berikut.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \ldots \times a}_{n \text{ faktor}}$$

Contoh 4.1

1. $4^5 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$
2. $7^6 = 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$
3. $(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$

Berdasarkan penjelasan di atas, diperoleh sifat-sifat berikut ini.

Misalkan $a, b \in R$ dan m, n adalah bilangan bulat positif.

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$
2. $\frac{a^m}{b^m} = a^{m-n}, m > n$
3. $(a^m)^n = a^{m \times n}$
4. $(a \times b)^n = a^n \times b^n$

2. Bilangan Berpangkat Nol

Perhatikan kembali rumus $\frac{a^m}{b^m} = a^{m-n}$ pada pembahasan sebelumnya. Jika dipilih $m = n$ maka diperoleh:

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-n}$$

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{n-n}$$

$$1 = a^0$$

Jadi, $a^0 = 1$, dengan $a \neq 0$.

Contoh 4.2

1. $6^0 = 1$
2. $(-45)^0 = 1$

3. Bilangan Berpangkat Negatif

Apa yang terjadi jika $m = 0$?

Dari pembahasan di atas jika dipilih $m = 0$, maka:

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-n}$$

$$\frac{a^m}{a^o} = a^{0-n}$$

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

Jadi, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ atau $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$, dengan $a \neq 0$.

Contoh 4.3

1. $16^{-3} = \frac{1}{16^3}$

2. $14^{-3} = \frac{1}{14^2}$

Latihan 4.1

1. Tentukan hasil pemangkatan bilangan-bilangan berikut.
   a. 6^3 c. -4^2
   b. $(-5)^4$ d. $(-3x)^5$
2. Nyatakan bilangan-bilangan berikut dengan pangkat negatif.
   a. $\frac{1}{32}$ b. c. 0,0001
3. Tentukan hasil pemangkatan bilangan-bilangan berikut.
   a. -4^{-3} c. 4^{-6}
   b. $(-3x)^{-4}$ d. $5y^{-4}$

4. Suatu unsur radioaktif memiliki waktu paro $\left(T_{\frac{1}{2}}\right)$ 80 tahun. Tentukan waktu

(t) yang dibutuhkan agar aktivitasnya (A) 25% dari nilai awalnya (A_0).

Petunjuk: $\frac{A}{A_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{\frac{1}{2}}}}$

B. Bilangan Pecahan Berpangkat

Untuk menentukan hasil pemangkatan bilangan pecahan berpangkat dapat di gunakan definisi bilangan berpangkat. Jika $a, b \in$ B, $b \neq 0$, n adalah bilangan bulat positif maka:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \cdots \frac{a}{b}}_{n \text{ faktor}} = \frac{a \times a \times a \times \cdots \times a}{\underbrace{b \times b \times b \times \cdots \times b}_{n \text{ faktor}}} = \frac{a^n}{b^n}$$

$\frac{Xn+1}{2}$

Jadi, . $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Contoh 4.4

1. $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$
2. $\left(\frac{4}{5}\right)^4 = \frac{4^4}{5^4} = \frac{256}{625}$

Bilangan $a^{\frac{m}{n}}$ dengan a bilangan bulat dan $n \neq 0$ didefinisikan sebagai berikut.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m},\ a \in B,\ a \neq 0$$

Bilangan $a^{\frac{m}{n}}$ disebut bilangan berpangkat tak sebenarnya.

Contoh 4.5

1. $6^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{6^2}$
2. $8^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{8^4}$

Latihan 4.2

1. Tentukan hasil perpangkatan dari bilangan-bilangan berikut.

   a. $(16)^{\frac{1}{2}}$

   b. $\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$

   c. $(64x^3)^{\frac{1}{3}}$

   d. $\left(\frac{8}{128}\right)^{\frac{1}{3}}$

2. Nyatakan bilangan-bilangan berikut dalam bentuk akar.

   a. $5^{\frac{1}{2}}$

   b. $7^{3\frac{2}{5}}$

   c. $x^{-\frac{4}{5}}$

   d. $-(ab)^{\frac{3}{4}}$

3. Nyatakan bilangan-bilangan berikut dalam bentuk pangkat positif.

   a. $\sqrt[3]{a^4}$

   b. $\sqrt[4]{5^{-3}}$

   c. $\frac{3}{\sqrt[4]{5^3}}$

   d. $\sqrt[2]{x^3 y^6}$

4. Tentukan hasil perpangkatan bilangan berikut ini.

   a. $ab^{\frac{1}{2}} : \sqrt{bc}$

   c. $0,2^{\frac{3}{2}} : 0,2^{\frac{1}{2}}$

   b. $64^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}}$

   d. $a^{\frac{1}{2}}b : abc^{\frac{1}{3}}$

5. Nyatakan bentuk perpangkatan berikut menjadi bentuk pangkat positif.

   a. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{1}{3}}$

   c. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{1}{3}}$

   b. $\dfrac{a^{-\frac{1}{2}}b^{3}c^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{3}{2}}b^{-1}c^{-2}}$

   d. $\left(\frac{2}{16}\right)^{\frac{1}{3}}$

C. Bentuk Akar

Dalam matematika kita mengenal berbagai jenis bilangan. Beberapa contoh jenis bilangan diantaranya adalah bilangan rasional dan irrasional. Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk , $\frac{m}{n}$ dengan $m, n \in$ B dan $n \neq 0$. Contoh bilangan rasional seperti: $\frac{2}{3}, \frac{6}{5}, \frac{3}{4}$, 5, 3 dan seterusnya. Sedangkan bilangan irrasional adalah bilangan riil yang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{m}{n}$, dengan $m, n \in$ B dan $n \neq 0$. Bilangan-bilangan seperti $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt[3]{4}$ termasuk bilangan irrasional, karena hasil akar dari bilangan tersebut bukan merupakan bilangan rasional.

Bilangan-bilangan semacam itu disebut bentuk akar. Sehingga dapat disimpulkan bahwa bentuk akar adalah akar-akar dari suatu bilangan riil positif, yang hasilnya merupakan bilangan irrasional.

1. Operasi Hitung Bentuk Akar

Dua bilangan bentuk akar atau lebih dapat dijumlahkan, dikurangkan, maupun dikalikan.

a. Penjumlahan dan Pengurangan Bentuk Akar

Untuk memahami cara menjumlahkan dan mengurangkan bilangan-bilangan dalam bentuk akar, perhatikan contoh - contoh berikut.

1. $4\sqrt{3}+3\sqrt{3} = (4+3)\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$
2. $6\sqrt{5}-3\sqrt{5} = (6-3)\sqrt{3} = 3\sqrt{5}$

Dari contoh di atas, maka untuk menjumlahkan dan mengurangkan bilangan-bilangan dalam bentuk akar dapat dirumuskan sebagai berikut.

Untuk setiap *a*, *b*, dan *c* bilangan rasional positif, berlaku hubungan:

$a\sqrt{c}+b\sqrt{c}=(a+b)\sqrt{c}$ dan $a\sqrt{c}-b\sqrt{c}=(a-b)\sqrt{c}$

Contoh 4.6

1. $7\sqrt{7}+4\sqrt{7}-\sqrt{7}$
2. $\sqrt{5}-6\sqrt{5}+7\sqrt{5}$
3. $3\sqrt{2}+4\sqrt{8}+7\sqrt{32}$
4. $6\sqrt{27}-3\sqrt{12}-\sqrt{3}$

Penyelesaian:

1. $7\sqrt{7}+4\sqrt{7}-\sqrt{7} = (7+4-1)\sqrt{7} = 10\sqrt{7}$
2. $\sqrt{5}-6\sqrt{5}+7\sqrt{5} = (1-6+7)\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$
3. $3\sqrt{2}+4\sqrt{8}+7\sqrt{32} = 3\sqrt{2}+(4\times 2)\sqrt{2}+(7\times 4)\sqrt{2}$

$= 3\sqrt{2} + 8\sqrt{2} + 28\sqrt{2}$

$= (3 + 8 + 28)\sqrt{2}$

$= 39\sqrt{2}$

4. $6\sqrt{27} - 3\sqrt{12} - \sqrt{3} = (6x3)\sqrt{3} - (3x2)\sqrt{3} - \sqrt{3}$

$= 18\sqrt{3} - 6\sqrt{3} - \sqrt{3}$

$= (18 - 6 - 1)\sqrt{3}$

$= 11\sqrt{3}$

b. Perkalian Bentuk Akar

Untuk sembarang bilangan bulat positif *a* dan *b* berlaku sifat perkalian berikut.

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$$

Sifat di atas sekaligus dapat digunakan untuk menyederhanakan bentuk akar.

Contoh 4.7

1. $\sqrt{3}\left(3\sqrt{2} - \sqrt{5}\right)$
2. $\left(\sqrt{6} + 2\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)$

Penyelesaian:

1. $\sqrt{3}\left(3\sqrt{2} - \sqrt{5}\right) = \left(\sqrt{3} \times 3\sqrt{2}\right) - \left(\sqrt{3} \times \sqrt{5}\right)$

$= 3\left(\sqrt{3} \times \sqrt{2}\right) - \sqrt{15}$

$= 3\sqrt{6} - \sqrt{15}$

2. $\left(\sqrt{6} + 2\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)$

$= \left(\sqrt{6} \times 3\sqrt{2}\right) - \left(\sqrt{6} \times \sqrt{3}\right) + \left(2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}\right)$

$\left(2\sqrt{2} \times \sqrt{3}\right)$

$$= 3\left(\sqrt{6}\times\sqrt{2}\right)-\sqrt{18}+\left\{(2\times3)\left(\sqrt{2}\times\sqrt{2}\right)\right\}$$

$$-\ 2\left(\sqrt{2}\times\sqrt{3}\right)$$

$$= 3\sqrt{12}-\sqrt{18}+(6\times2)-2\sqrt{6}$$

$$= (3\times2)\sqrt{3}-3\sqrt{2}+12-2\sqrt{6}$$

$$= 6\sqrt{3}-3\sqrt{2}+12-2\sqrt{6}$$

c. *Pemangkatan Bilangan Bentuk Akar*

Bentuk akar juga dapat dipangkatkan. Adapun pemangtkatan bentuk akar akar didapat beberapa sifat.

1) *Pemangkatan bentuk* $\left(\sqrt[p]{a}\right)^n$

$$\left(\sqrt[p]{a}\right)^n = \underbrace{\sqrt[p]{a}\times\sqrt[p]{a}\times\sqrt[p]{a}\times\ldots\times\sqrt[p]{a}}_{n\text{ faktor}}$$

$$= \sqrt[p]{\underbrace{a\times a\times a\times\ldots\times a}_{n\text{ faktor}}}$$

$$= \sqrt[p]{a^n}$$

Jadi, . $\left(\sqrt[p]{a}\right)^n = \sqrt[p]{a^n}$

Contoh 4.8

1. $\left(\sqrt{3}\right)^4 = \sqrt{3^4} = 3^2 = 9$

2. $\left(\sqrt[3]{9}\right)^2 = \sqrt[3]{9^2} = \sqrt[3]{81}$

2) *Pemangkatan bentuk $\sqrt[p]{a}$ dengan pangkat negatif*

Bentuk akar dengan pangkat negatif sama halnya dengan bilangan berpangkat bilangan negatif. Sehingga:

$$\left(\sqrt[p]{a}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\sqrt[p]{a}\right)^n} = \frac{1}{\sqrt[p]{a^n}}$$

Contoh 4.9

$$\left(\sqrt[2]{3}\right)^{-5} = \frac{1}{\left(\sqrt[2]{3}\right)^5} = \frac{1}{\sqrt[2]{3^5}}$$

3) *Pemangkatan bentuk* $\left(a+\sqrt{b}\right)^2$ *dan* $\left(a-\sqrt{b}\right)^2$

$$\begin{aligned}\left(a+\sqrt{b}\right)^2 = \left(a+\sqrt{b}\right)\left(a+\sqrt{b}\right) &= a^2 + a\sqrt{b} + a\sqrt{b} + \left(\sqrt{b}\times\sqrt{b}\right)\\ &= a^2 + 2a\sqrt{b} + \left(\sqrt{b}\right)^2\end{aligned}$$

Jadi, . $\left(a+\sqrt{b}\right)^2 = a^2 + 2a\sqrt{b} + \left(\sqrt{b}\right)^2$

Dengan cara yang sama, akan diperoleh:

$$\left(a-\sqrt{b}\right)^2 = a^2 - 2a\sqrt{b} + \left(\sqrt{b}\right)^2$$

Contoh 4.10

$$\begin{aligned}\left(3+\sqrt{3}\right)^2 &= 3^2 + \left(2\times 3\times\sqrt{3}\right) + \left(\sqrt{3}\right)^2\\ &= 9 + 6\sqrt{3} + 3\\ &= 12 + 6\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\left(4-\sqrt{5}\right)^2 = 4^2 - \left(2\times 4\times\sqrt{5}\right) + \left(\sqrt{5}\right)^2$$
$$= 16 - 8\sqrt{5} + 5$$
$$= 21 - 8\sqrt{5}$$

4) *Pemangkatan bentuk* $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2$ *dan* $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$

Pada dasarnya penyelesaian dari pemangkatan bentuk $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2$ dan $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$ sama dengan penyelesaian pemangkatan bentuk $\left(a+\sqrt{b}\right)^2$ dan $\left(a-\sqrt{b}\right)^2$. Sehingga:

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 + \left(2\times\sqrt{a}\times\sqrt{b}\right) + \left(\sqrt{b}\right)^2$$
$$= a + 2\sqrt{a\times b} + b$$

Jadi, . $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a + 2\sqrt{a\times b} + b$

Dengan cara yang sama, maka akan diperoleh:

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 = a - 2\sqrt{a\times b} + b$$

Contoh 4.11

$$\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)^2 = 5 + 2\sqrt{5\times 7} + 7$$
$$= 12 + 2\sqrt{35}$$

$$\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2 = 3 - 2\sqrt{3\times 2} + 2$$
$$= 6 + 2\sqrt{6}$$

2. Hubungan Bentuk Akar dengan Pangkat Pecahan

Pada pembahasan yang lalu telah disebutkan beberapa sifat dari bilangan berpangkat bulat positif. Sifat-sifat tersebut akan digunakan untuk mencari hubungan antara bentuk akar

dengan pangkat pecahan. Sifat yang dimaksud adalah .

$\left(a^{m}\right)^{n} = a^{m \times n}$

Selain sifat tersebut terdapat sifat lain, yaitu:

Jika $a^p = a^q$ maka $p = q$ dengan $a > 0$, $a \neq 1$

a. Hubungan $\sqrt[n]{a}$ dengan

Perhatikan pembahasan berikut.

1) Misalkan $\sqrt{a} = a^p$. Jika kedua ruas dikuadratkan, maka diperoleh:

2) Misalkan . Jika kedua ruas dipangkatkan 3, maka diperoleh:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = \left(a^p\right)^2$$
$$\Leftrightarrow \quad a = a^{2p}$$
$$\Leftrightarrow \quad 1 = 2p$$
$$\Leftrightarrow \quad p = \tfrac{1}{2}$$

Jadi, $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$.

(Karena kedua ruas sama, maka pangkatnya juga sama)

$$\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = \left(a^p\right)^3$$
$$\Leftrightarrow \quad a = a^{3p}$$
$$\Leftrightarrow \quad 1 = 3p$$
$$\Leftrightarrow \quad p = \tfrac{1}{3}$$

Jadi, $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$.

3) Misalkan $\sqrt[n]{a} = a^p$. Jika kedua ruas dipangkatkan n, maka diperoleh:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \left(a^p\right)^n$$

$\Leftrightarrow \quad a = a^{np}$

$\Leftrightarrow \quad 1 = np$

$\Leftrightarrow \quad p = \frac{1}{n}$

Jadi, $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa untuk *a* bilangan real tidak nol dan *n* bilangan bulat positif, maka:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

b. Hubungan $\sqrt[n]{a^m}$ dengan $a^{\frac{m}{n}}$

Berdasarkan kesimpulan pangkat pecahan $a^{\frac{1}{n}}$, selanjutnya akan diperluas pada pangkat pecahan dalam bentuk

yang lebih umum $a^{\frac{m}{n}}$. Untuk tujuan itu, perhatikan pembahasan berikut.

$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$, menggunakan sifat pangkat bulat positif

$\Leftrightarrow \quad a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ menggunakan pangkat pecahan $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, menggunakan sifat pemangkatan bentuk

$\left(\sqrt[p]{a}\right)^n = \sqrt[p]{a^n}$

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa untuk *a* bilangan real tidak nol, *m* bilangan bulat, dan *n* bilangan asli, $n \geq 2$, maka: . $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Contoh 4.12

Ubahlah bentuk akar berikut ke dalam bentuk pangkat pecahan.

a. $\sqrt[3]{4}$ c. $\sqrt[4]{2^3}$

b. $\sqrt[3]{5^3}$ d. $\sqrt[3]{2^6}$

Penyelesaian:

a. $\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^2}$

$= 2^{\frac{2}{3}}$

c. $\sqrt[4]{2^3} = 2^{\frac{3}{4}}$

b. $\sqrt{5^3} = \sqrt[2]{5^3}$

$= 5^{\frac{3}{2}}$

d. $\sqrt[3]{2^6} = 2^{\frac{6}{3}}$

$= 2^2 = 4$

Latihan 4.3

1. Tentukan hasil penjumlahan dan pengurangan dari bentuk akar berikut.

 a. $3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + \sqrt{3}$ c. $3\sqrt{27} + \sqrt{48} - \sqrt{12}$

 b. $4\sqrt[3]{5} + 5\sqrt[3]{5} - 5^{1\frac{1}{3}}$ d. $\sqrt{50} - 4\sqrt{5} - \sqrt{125}$

2. Hitunglah perkalian bentuk akar berikut.

 a. $\sqrt{5}\left(3\sqrt{2} - 3\sqrt{7}\right)$ b. $\left(\sqrt{3} + 2\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{3} - 2\sqrt{18}\right)$

3. Tentukan hasil dari bentuk akar berikut.

 a. $\left(\sqrt[4]{5^3}\right)^2$ c. $\left(\sqrt{3} + \sqrt{7}\right)^2$

 b. $\left(-2\sqrt[4]{3x}\right)^{-3}$ d. $\left(2p\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)^2$

4. Tentukan hasil perhitungan dari operasi berikut.

 a. $2\sqrt{3} - 2\sqrt{12} + 3\sqrt{2}$

 b. $\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \ldots}}}$

5. Sederhanakan . $\sqrt{4a^2b^3} + \sqrt{a^3b^4} + \sqrt{9a^2b^5}$

D. Merasionalkan Bentuk Akar Kuadrat

Dalam sebuah bilangan pecahan penyebutnya dapat berupa bentuk akar. Pecahan $\frac{4}{\sqrt{2}}, \frac{6}{\sqrt{3}}, \frac{10}{\sqrt{5}}, \frac{3}{2+\sqrt{3}},$ adalah beberapa contoh pecahan yang penyebutnya berbentuk akar. Penyebut pecahan seperti itu dapat dirasionalkan. Cara merasionalkan penyebut suatu pecahan tergantung dari bentuk pecahan tersebut.

1. Merasionalkan Bentuk $\frac{a}{\sqrt{b}}$

Untuk menghitung nilai $\frac{6}{\sqrt{3}}$ ada cara yang lebih mudah daripada harus membagi 6 dengan nilai pendekatan dari $\sqrt{3}$, yaitu dengan merasionalkan penyebut. Cara ini dapat dilakukan dengan menggunakan sifat perkalian bentuk akar:

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$$
$$\sqrt{a} \times \sqrt{a} = \sqrt{a \times a} = a$$

Selanjutnya pecahan diubah bentuknya $\frac{6}{\sqrt{3}}$ dengan memanipulasi aljabar.

Contoh 4.13

$$\begin{aligned} \frac{6}{\sqrt{3}} &= \frac{6}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{6 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} \\ &= \frac{6\sqrt{3}}{3} \\ &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Mengubah $\frac{6}{\sqrt{3}}$ menjadi $\frac{3\sqrt{6}}{3}$ atau $2\sqrt{3}$ disebut *merasionalkan penyebut pecahan*. Dari uraian di atas, dapat kita ambil kesimpulan bahwa pecahar $\frac{a}{\sqrt{3}}$ (*a* bilangan rasional dan *b* bentuk akar), bagian penyebut dapat dirasionalkan, dengan mengalikan pecahan tersebut dengan $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}}$ sehingga pecahan tersebut menjadi:

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

Contoh 4.14

1. $\frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{12}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$
   $= \frac{12\sqrt{5}}{5}$
2. $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$
   $= \frac{\sqrt{10}}{2}$

2. Merasionalkan Bentuk $\frac{a}{b+\sqrt{c}}$ atau $\frac{a}{b-\sqrt{c}}$

Untuk merasionalkan penyebut pecahan yang berbentuk $\frac{a}{b+\sqrt{c}}$, terlebih dahulu perhatikan perkalian pasangan bilangan $\left(b+\sqrt{c}\right)$ dan $\left(b+\sqrt{c}\right)$ dengan *b* dan *c* bilangan rasional dan $\sqrt{c}$ bentuk akar.

$$\begin{aligned}\left(b+\sqrt{c}\right)\left(b-\sqrt{c}\right) &= b^2 - b\sqrt{c} + b\sqrt{c} - c \\ &= b^2 - c\end{aligned}$$

Karena b dan c bilangan rasional, maka hasil kali pasangan bilangan $\left(b+\sqrt{c}\right)$ dan $\left(b-\sqrt{c}\right)$ juga rasional. Pasangan bilangan $\left(b+\sqrt{c}\right)$ lan $\left(b-\sqrt{c}\right)$ disebut bentuk-bentuk akar sekawan atau dikatakan $\left(b+\sqrt{c}\right)$ sekawan dari $\left(b-\sqrt{c}\right)$ dan sebaliknya.

Dengan menggunakan sifat perkalian bentuk-bentuk akar sekawan maka penyebut bentuk $\frac{a}{b-\sqrt{c}}$ atau $\frac{a}{b+\sqrt{c}}$ dapat dirasionalkan dengan memanipulasi aljabar.

a. Pecahan Bentuk $\frac{a}{b+\sqrt{c}}$

Untuk pecahan $\frac{a}{b+\sqrt{c}}$ diubah menjadi:

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+\sqrt{c}} &= \frac{a}{b+\sqrt{c}} \times \frac{b-\sqrt{c}}{b-\sqrt{c}} \\ &= \frac{a\left(b-\sqrt{c}\right)}{b^2-c}\end{aligned}$$

b. *Pecahan Bentuk* $\frac{a}{b-\sqrt{c}}$

Untuk pecahan $\frac{a}{b-\sqrt{c}}$ disederhanakan menjadi:

$$\begin{aligned}\frac{a}{b-\sqrt{c}} &= \frac{a}{b-\sqrt{c}} \times \frac{b+\sqrt{c}}{b+\sqrt{c}} \\ &= \frac{a\left(b+\sqrt{c}\right)}{b^2-c}\end{aligned}$$

Contoh 4.15

1. $$\begin{aligned}\frac{3}{5-\sqrt{2}} &= \frac{3}{5-\sqrt{2}} \times \frac{5+\sqrt{2}}{5+\sqrt{2}} \\ &= \frac{3\left(5+\sqrt{2}\right)}{5^2-2} \\ &= \frac{15+3\sqrt{2}}{23}\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2} &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2} \times \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+2} \\ &= \frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+2\right)}{3-2^2} \\ &= \frac{3+2\sqrt{3}}{-1} \\ &= -\left(3+2\sqrt{3}\right)\end{aligned}$$

3. Merasionalkan Bentuk $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$ atau $\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$

Penyebut pecahan yang berbentuk $\frac{a}{\sqrt{b}\pm\sqrt{c}}$ dapat dirasionalkan dengan menggunakan manipulasi aljabar yang hampir sama dengan merasionalkan penyebut pecahan yang berbentuk $\frac{a}{\sqrt{b}\pm\sqrt{c}}$.

a. *Pecahan Bentuk* $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$

Untuk pecahan pembilang dan penyebut dikalikan . $\sqrt{b}-\sqrt{c}$

$$\begin{aligned}\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} &= \frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} \times \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}\\ &= \frac{a\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)}{b-c}\end{aligned}$$

b. *Pecahan Bentuk* $\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$

Untuk pecahan $\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$ pembilang dan penyebut dikalikan $\left(\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}\right)$.

$$\begin{aligned}\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} &= \frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} \times \frac{\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}\\ &= \frac{a\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)}{b-c}\end{aligned}$$

Contoh 4.16

1. $$\frac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$$
$$= \frac{4\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{5-2}$$
$$= \frac{4\sqrt{5}+4\sqrt{2}}{3}$$

2. $$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}$$
$$= \frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)}{3-7}$$
$$= \frac{3+\sqrt{21}}{-4}$$

Latihan 4.4

Rasionalkan penyebut bentuk akar berikut.

1. $\dfrac{a}{\sqrt{5}}$
2. $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{\frac{1}{2}}$
3. $\dfrac{5}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$
4. $\dfrac{5\sqrt{3}-5}{3-\sqrt{2}}$
5. $\dfrac{5-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-5}$
6. $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}=\sqrt{3}}$

Rangkuman

1. Untuk bilangan bulat a dengan $a \neq 0$, bilangan cacah m dan m berlaku
   a. $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ faktor}}$
   b. $a^m \times a^n = a^{m+n}$
   c. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $m > n$
   d. $(a^m)^n = a^{m \times n}$
   e. $(a \times b)^n = a^n \times b^n$
   f. $a^0 = 1$
   g. $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$
   h. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

2. Operasi hitung bentuk akar
   a. $a\sqrt{c} + b\sqrt{c} = (a+b)\sqrt{c}$
   b. $a\sqrt{c} - b\sqrt{c} = (a-b)\sqrt{c}$
   c. $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$
   d. $\sqrt[p]{a^n} = a^{\frac{n}{p}}$
   e. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^{-n} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^n}}$
   f. $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$
   g. $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 = a - 2\sqrt{ab} + b$
   h. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
   i. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Uji Kompetensi

A. Pilihlah satu jawaban yang paling benar dengan cara memberi tanda silang (X) pada huruf *a, b, c,* atau *d*!

1. 7^3 artinya . . . .

   a. 7×3 c. 3×7

   b. $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ d. $7 \times 7 \times 7$

2. Nilai dari $(–6)^3$ adalah . . . .

   a. 64 c. –216

   b. –12 d. 216

3. Nilai dari $–5^4$ adalah . . . .

   a. –625 c. 325

   b. 225 d. 625

4. Bentuk $3^{–2}$ bila diubah ke dalam bentuk pangkat bilangan bulat positif adalah . . . .

   a. 3 *a* c. $\frac{1}{3^2}$

   b. –34 d. $-\frac{1}{2^4}$

5. Bentuk $(3a)^{–4}$ bila diubah ke dalam bentuk pangkat bilangan positif adalah . . . .

   a. $–81a$ c. $-\frac{1}{2a^4}$

   b. $–3a^4$ d. $-\frac{1}{8a^4}$

6. Nilai dari $(–7)^2$ adalah . . . .

   a. 49 c. –49

   b. $\frac{1}{7}$ d. –14

7. Hasil dari $-\frac{4}{25}$ adalah . . . .

a. $-\frac{4}{25}$

b. $\frac{25}{3}$

c. $\frac{5}{2}$

d. $\frac{2}{5}$

8. Bentuk akar dari $a^{\frac{n}{m}}$ adalah . . . .

a. $\sqrt[m]{a^n}$

b. $\sqrt[n]{a^m}$

c. $\sqrt[mn]{a^n}$

d. $\sqrt{a}$

9. Bentuk pangkat dari $\sqrt[3]{26^2}$ adalah . . . .

a. 26

b. $26^{\frac{2}{3}}$

c. $\frac{1}{\sqrt[3]{26^2}}$

d. $\frac{1}{26^{\frac{2}{3}}}$

10. Nilai dari $2^{3^{\frac{2}{3}}}$ adalah . . . .

a. 24

b. 16

c. 4

d. 2

11. Hasil dari $8^2 \times 4^{-4}$ adalah . . . .

a. $\frac{1}{4}$

b. 4

c. 8

d. 64

12. Hasil dari $[(3n)^{-2}]^3$ adalah . . . .

a. $16n^{-8}$

b. $64m^{-8}$

c. $\frac{1}{64n^6}$

d. $\frac{256}{n^6}$

13. $\left(\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}\right)^{0} = \ldots.$

a. 1

b. $\frac{1}{5}$

c. $\frac{1}{25}$

d. 0

14. Jika $a - b = 2$, maka nilai dari $(b - a)^6$ adalah . . . .

a. $\frac{1}{64}$

b. 64

c. $-\frac{1}{64}$

d. –64

15. Diketahui , $\left(\frac{1}{3}\right)^{4} = 3^{x}$ maka nilai x adalah . . . .

a. –13

b. –4

c. 4

d. 13

B. Jawablah pertanyaan-pertanyaan di bawah ini dengan benar!

1. Hasil dari $\frac{3^2 \times 7^2 \times 2^4}{5^2 \times 2^2 \times 8}$ adalah . . . .

2. Bentuk sederhana dari $\frac{(3b^{-8})(5c^{-8})}{45b^{-3}c^{2}}$ adalah . . . .

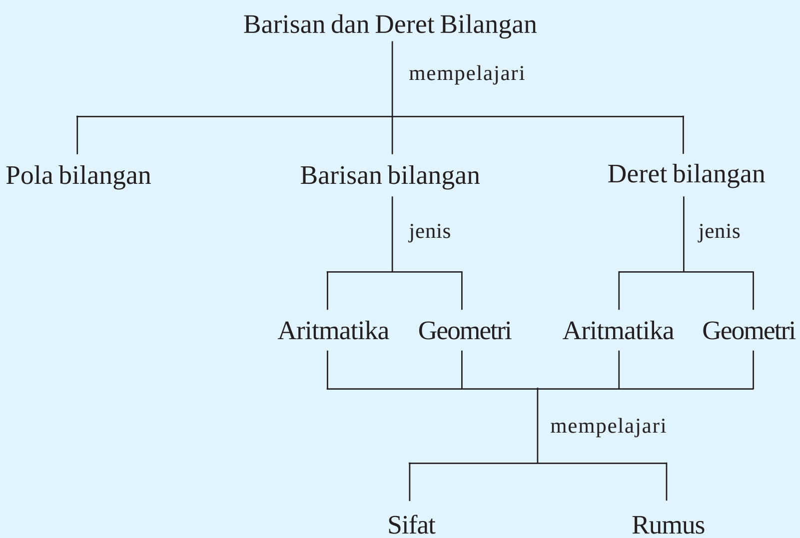
3. Nilai x jika $2^{x-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$ adalah . . . .

4. Nilai dari $\sqrt{54} + \sqrt{24} - \sqrt{6} = \ldots.$

5. Bentuk rasional dan sederhana dari $\frac{4}{3+\sqrt{2}}$ adalah . . . .

BAB V
BARISAN DAN DERET BILANGAN

Peta Konsep



Kata Kunci
1. Pola
2. Bilangan
3. Barisan
4. Deret
5. Aritmatika
6. Geometri

Sumber: www.kidswebindia.com
Gambar 5.1 Bunga matahari

Dalam kehidupan sehari-hari sering kita temui benda-benda di sekitar kita baik tanaman, batu, hewan, dan lain-lain yang memiliki barisan bilangan tertentu. Sebagai contoh adalah tanaman bunga matahari. Dalam susunan biji bunga matahari (kwaci) jika kita hitung banyaknya kwaci dari dalam sampai luar, maka jumlahnya akan tampak suatu barisan bilangan tertentu. Selain itu tidak hanya jumlah kwaci saja yang memiliki barisan bilangan, kita juga dapat melihat susunan daun pada bunga, segmen-segmen dalam buah nanas atau biji cemara. Semua contoh di atas menunjukkan barisan bilangan 1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 13 , 21 , . . . Barisan bilangan ini dikenal sebagai ***barisan bilangan fibonacci***. Setiap bilangan atau angka dalam barisan ini merupakan jumlah dari dua bilangan sebelumnya. Barisan bilangan fibonacci ini ditemukan oleh Fibonacci yang nama lengkapnya adalah Leonardo of Pisa (1180 - 1250). Ia menjelaskan teka-teki barisan fibonacci dalam karyanya yang berjudul Liber Abaci.

Dengan mempelajari bab ini, kalian diharapkan dapat menentukan pola barisan bilangan sederhana, suku ke-*n* barisan aritmatika dan geometri, menentukan jumlah *n* suku pertama, dan memecahkan masalah yang berkaitan dengan barisan dan deret.

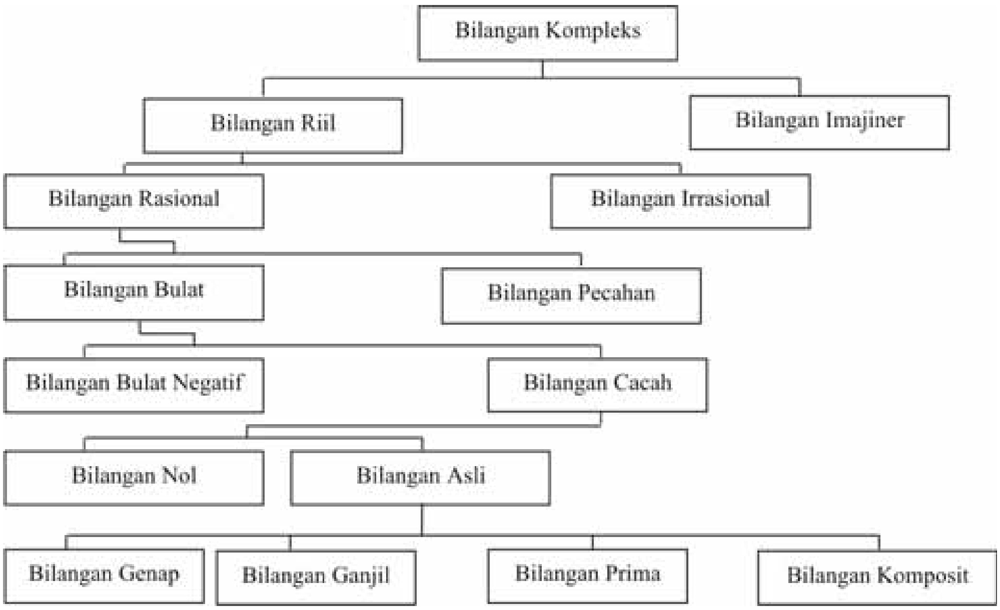
A. Pola Bilangan

1. Pengertian Pola Bilangan

Sebelum kita lebih jauh membahas pola bilangan, alangkah lebih baik jika kita terlebih dahulu mengetahui apa itu pola dan apa itu bilangan. Dalam beberapa pengertian yang dikemukakan para ahli tentang pola, dapat dirumuskan bahwa **pola** adalah sebuah susunan yang mempunyai bentuk yang teratur dari bentuk yang satu ke bentuk berikutnya.

Sedangkan **bilangan** adalah sesuatu yang digunakan untuk menunjukkan kuantitas (banyak, sedikit) dan ukuran (berat, ringan, panjang, pendek, luas) suatu objek. Bilangan ditunjukkan dengan suatu tanda atau lambang yang disebut angka.

Dalam matematika terdapat beberapa bilangan yang dapat disusun menjadi diagram pohon bilangan. Adapun diagram pohon bilangan dapat ditunjukkan sebagai berikut.



Gambar 5.2 Diagram pohon bilangan

Dalam beberapa kasus sering kita temui sebuah bilangan yang tersusun dari bilangan lain yang mempunyai pola tertentu, maka yang demikian itu disebut **pola bilangan**.

Dari beberapa jenis bilangan, tidak semua bilangan yang akan dibahas dalam bab ini. Dalam bab ini pembahasan akan difokuskan pada himpunan bilangan asli. Sedangkan bilangan asli sendiri dibagi menjadi beberapa himpunan bagian bilangan asli.

Beberapa himpunan bagian bilangan asli tersebut antara lain:

Himpunan bilangan ganjil = {1 , 3 , 5 , 7 , 9 , . . . }
Himpunan bilangan genap = {2 , 4 , 6 , 8 , . . .}
Himpunan bilangan kuadrat = {1 , 4 , 9 , 16, . . .}, dan
Himpunan bilangan prima = {2 , 3 , 5 , 7 , 11 , . . . }

Untuk selanjutnya akan dipelajari mengenai pola-pola bilangan yang merupakan himpunan bagian dari himpunan bilangan asli.

2. Pola Bilangan Ganjil dan Bilangan Genap

a. Pola Bilangan Ganjil

Salah satu dari himpunan bagian bilangan asli adalah bilangan ganjil. Bilangan ganjil adalah bilangan bulat yang tidak habis dibagi 2 atau bukan kelipatan dua. Dalam hal ini karena pembahasan hanya pada himpunan bagian dari bilangan asli, maka anggota dari himpunan bilangan asli ganjil adalah {1, 3, 5, 7, 9, . . . }. Bagaimanakah pola bilangan ganjil? Untuk mengetahui bagaimana pola bilangan ganjil, lakukanlah kegiatan berikut.

Kegiatan 5.1
Nama kegiatan: Mencari pola bilangan ganjil
Alat dan bahan:
1. Kertas karton
2. Gunting

Cara kerja:
1. Buatlah sebuah lingkaran kecil sebanyak bilangan-bilangan ganjil dengan cara menggunting kertas karton seperti berikut.

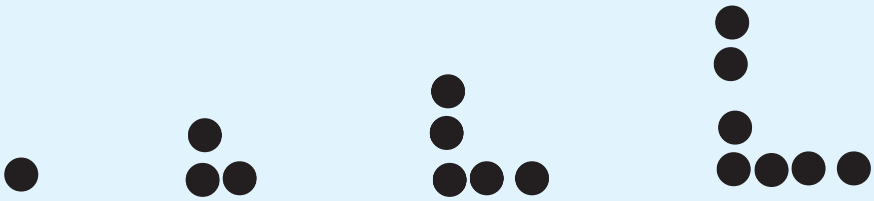
   1 dinyatakan dengan ●

   3 dinyatakan dengan ● ● ●

   5 dinyatakan dengan ● ● ● ● ●

   7 dinyatakan dengan ● ● ● ● ● ● ● , dst

2. Susunlah lingkaran-lingkaran kecil tersebut menjadi sebuah pola yang teratur. Sebagai contoh perhatikan pola berikut.



3. Buatlah sebuah segitiga sama sisi dengan panjang sisi 1 cm sebanyak bilangan-bilangan ganjil dengan cara menggunting kertas karton seperti berikut.

1 dinyatakan dengan 

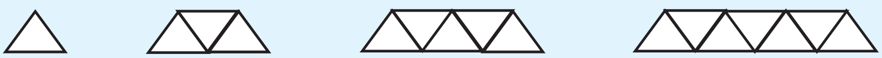
3 dinyatakan dengan 

5 dinyatakan dengan 

7 dinyatakan dengan 

dan seterusnya

4. Susunlah segitiga sama sisi tersebut menjadi sebuah pola yang teratur. Sebagai contoh perhatikan pola berikut.



1 3 5 7

5. Buatlah pola-pola yang lain dari lingkaran dan segitiga sama sisi tersebut.

Kesimpulan

Gambar pola pada no. 2 dan 4 di atas, memiliki bentuk yang teratur dari bentuk yang satu kebentuk yang lain. Selain itu gambar di atas juga menyatakan bilangan-bilangan ganjil, maka gambar di atas merupakan pola bilangan ganjil.

Dari pola-pola tersebut, kemudian akan ditentukan jumlah-jumlah bilangan asli ganjil. Untuk lebih jelas perhatikan uraian penjumlahan bilangan asli ganjil berikut.

Penjumlahan dari 2 bilangan asli ganjil yang pertama

$1 + 3 = 4 \quad \Rightarrow 4 = 2^2$

Penjumlahan dari 3 bilangan asli ganjil yang pertama

$1 + 3 + 5 = 9 \quad \Rightarrow 9 = 3^2$

Penjumlahan dari 4 bilangan asli ganjil yang pertama

$1 + 3 + 5 + 7 = 16 \quad \Rightarrow 16 = 4^2$

Penjumlahan dari 5 bilangan asli ganjil yang pertama

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 \quad \Rightarrow 25 = 5^2$

Dari hasil penjumlahan bilangan-bilangan ganjil di atas, maka kita dapat menuliskan sebagai berikut.

Penjumlahan dari 2 bilangan asli ganjil yang pertama

$1 + 3 = 2^2$

Penjumlahan dari 3 bilangan asli ganjil yang pertama

$1 + 3 + 5 = 3^2$

Penjumlahan dari 4 bilangan asli ganjil yang pertama

$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$

Penjumlahan dari 5 bilangan asli ganjil yang pertama

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa:

Jumlah dari *n* bilangan asli ganjil yang pertama adalah:

$$\underbrace{1+3+5+7+}_{n \text{ bilangan}}$$

Contoh 5.1

1. Tentukan jumlah dari 7 bilangan asli ganjil yang pertama.

   Penyelesaian:

   Tujuh bilangan asli ganjil yang pertama adalah:

   1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, dan $n = 7$.

   Jumlah dari 7 bilangan asli ganjil yang pertama
   $= n^2 = 7^2 = 49$.

   Jadi, jumlah dari 7 bilangan asli ganjil yang pertama adalah 49.

2. Berapa banyaknya bilangan asli yang pertama yang jumlahnya 144?

   Penyelesaian:

   Jumlah dari n bilangan asli ganjil yang pertama = n^2

   Sehingga $\quad 144 = n^2$

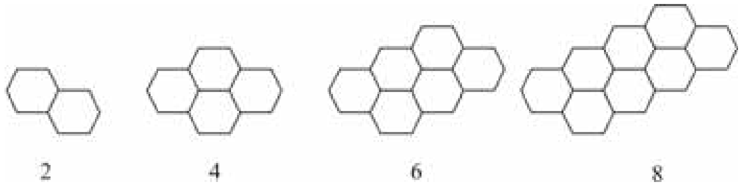
   $\Leftrightarrow \quad n = 12$, atau

   $\Leftrightarrow \quad n = -12$ (tidak memenuhi)

   Jadi, banyaknya bilangan ganjil adalah 12.

b. *Pola Bilangan Genap*

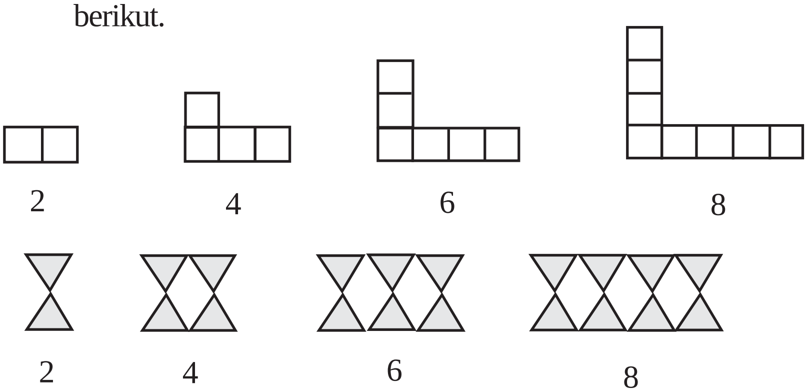
Selain bilangan ganjil, yang termasuk himpunan bagian bilangan asli adalah bilangan genap, yaitu { 2 , 4 , 6 , 8 , . . . }. Perhatikan susunan heksagonal berikut.



Gambar 5.3 Heksagonal bilangan genap

Gambar tersebut menunjukkan bahwa heksagonal yang terdiri sebanyak bilangan-bilangan genap dapat disusun membentuk suatu pola tertentu. Sehingga gambar tersebut merupakan pola bilangan genap.

Adapun pola-pola bilangan genap yang lain adalah sebagai berikut.



Gambar 5.4 Pola bilangan genap

Dari pola-pola di atas, akan ditentukan jumlah berapa bilangan asli genap pertama. Untuk lebih jelas perhatikan uraian penjumlahan bilangan asli genap berikut.

Penjumlahan dari 2 bilangan asli genap yang pertama

$2 + 4 = 6 \quad \Rightarrow \quad 6 = 2\,(2+1)$

Penjumlahan dari 3 bilangan asli genap yang pertama

$2 + 4 + 6 = 12 \quad \Rightarrow \quad 12 = 3(\,3 + 1)$

Penjumlahan dari 4 bilangan asli genap yang pertama

$2 + 4 + 6 + 8 = 20 \quad \Rightarrow \quad 20 = 4(\,4 + 1)$

Dari hasil penjumlahan bilangan-bilangan genap di atas, kita dapat menuliskannya sebagai berikut.

Penjumlahan dari 2 bilangan asli genap yang pertama

$2 + 4 = 2(2+1)$

Penjumlahan dari 3 bilangan asli genap yang pertama

$2 + 4 + 6 = 3(3+1)$

Penjumlahan dari 4 bilangan asli genap yang pertama

$2 + 4 + 6 + 8 = 4(4+1)$

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa:

$$\underbrace{2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + n}_{n \text{ Bilangan}} = n\,(\,n + 1)$$

Contoh 5.2

1. Tentukan jumlah 8 bilangan asli genap yang pertama.

   Penyelesaian:

   Delapan bilangan asli genap yang pertama adalah 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16.
   $n = 8$

   Jumlah 8 bilangan asli genap yang pertama

   $= n\ (\ n + 1)$
   $= 8\ (\ 8 + 1)$
   $= 8 \times 9$
   $= 72$

   Jadi, Jumlah 8 bilangan asli genap yang pertama 72.

2. Tentukan banyak bilangan asli genap yang pertama yang jumlahnya 121.

   Penyelesaian:

   Jumlah n bilangan asli genap adalah $n\ (n + 1)$, maka:

$$
\begin{aligned}
& n(n+1) = 121 \\
\Leftrightarrow\ & n^2 + n - 121 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (n - 10)\ (n + 11) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & n - 10 = 0 \text{ atau } n + 11 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & n = 10 \quad \text{atau} \quad n = 11 \text{ (tidak memenuhi)}
\end{aligned}
$$

   Jadi, banyak bilangan asli genap adalah 10.

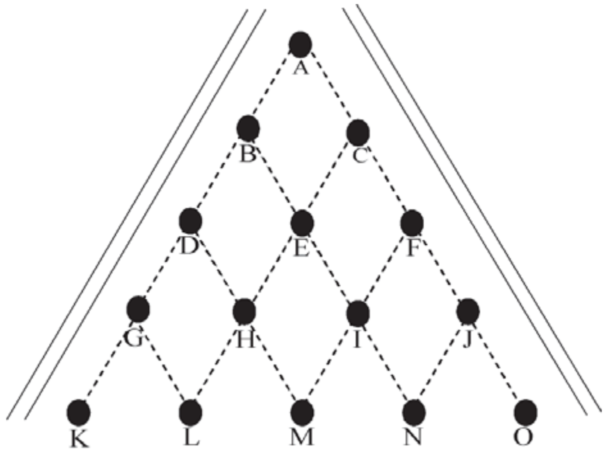
3. Pola Bilangan pada Segitiga Pascal

a. *Mengenal Segitiga Pascal*

Untuk mengetahui bagaimana susunan bilangan-bilangan pada segitiga pascal, maka perlu terlebih dahulu kita memperhatikan papan permainan berikut.

Gambar berikut adalah sebuah permainan papan luncur, pada setiap titik dipasang sebuah paku yang akan digunakan untuk meluncurkan sebuah kelereng yang dimulai dari titik A

menuju ke titik-titik yang lain. Banyaknya lintasan yang dilalui oleh bola dari A ke titik-titik yang lain dapat dinyatakan dalam tabel berikut.

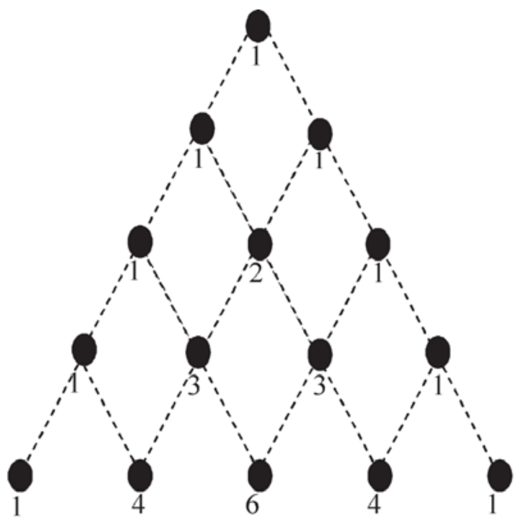


Gambar 5.5 Permainan papan luncur

Lintasan	Banyak Lintasan	Rute-rute Lintasan
A ke B	1	A - B
A ke C	1	A - C
A ke D	1	A - B - D
A ke E	2	A - B - E ; A - C - E
A ke F	1	A - C - F
A ke G	1	A - B - D - G
A ke H	3	A - B - D - H ; A - B - E - H ; A - C - E - H
A ke I	3	A - C - F - I ; A - C - E - I ; A - B - E - I
A ke J	1	A - C - F - J
A ke K	1	A - B - D - G - K

Lintasan	Banyak Lintasan	Rute - rute Lintasan
A ke L	4	A - B - D - G - L ; A - B - D - H - L ; A - B - E - H - L ; A - C - E - H - L
A ke M	6	A - B - D - H -M ; A - B - E - H - M ; A - B - E - I - M ; A - C - E - H - M ; A - C - E - I - M ; A - C - F - I - M
A ke N	4	A - C - F - J - N ; A - C - F - I - N ; A - C - E - I - N ; A - B - E - I - N
A ke O	1	A - C - F - J - O

Jika huruf-huruf pada gambar papan permainan tersebut diganti dengan angka-angka yang menunjukkan banyaknya lintasan dari A ke titik tertentu dan A sendiri diganti dengan angka 1, maka papan permainan tersebut menjadi:



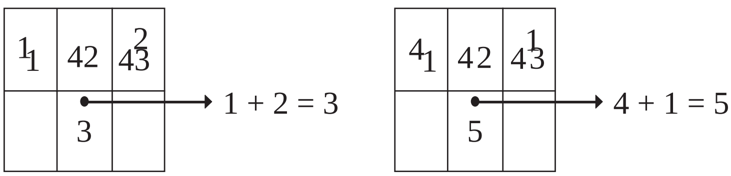
Gambar 5.6 Pola segitiga Pascal

Susunan bilangan-bilangan seperti pada gambar disebut segitiga pascal. Kata segitiga diberikan mengingat susunan bilangan-bilangan itu membentuk sebuah segitiga. Sedangkan kata pascal diberikan untuk mengenang Blaise Pascal (1623-1662), seorang ahli matematika bangsa Perancis yang menemukan susunan bilangan-bilangan tersebut. Jika di perhatikan, ternyata terdapat hubungan antara suatu bilangan dengan jumlah bilangan berdekatan yang terdapat pada baris yang ada tepat di atasnya.

Untuk lebih jelas perhatikan susunan segitiga pascal berikut.

					1						$n = 0$
				1		1					$n = 1$
			1		2		1				$n = 2$
		1		3		3		1			$n = 3$
	1		4		6		4		1		$n = 4$
1		5		10		10		5		1	$n = 5$

Sebagai contoh 6 kotak yang masing-masing terdiri dari 2 baris dan 3 kolom seperti kotak-kotak yang di arsir di atas. Bilangan yang berada pada baris pertama, jika dijumlahkan maka hasilnya adalah bilangan yang berada pada baris kedua.



b. *Jumlah Bilangan-bilangan pada Setiap Baris pada Segitiga Pascal*

Penjumlahan bilangan-bilangan pada setiap baris dalam segitiga pascal, akan diperoleh hasil yang menunjukkan barisan bilangan. Perhatikan penjumlahan bilangan-bilangan pada setiap baris pada segitiga pascal berikut.

Bilangan Segitiga Pascal											Jumlah	
					1						$\Rightarrow 1$	$\Leftrightarrow 1 = 2^0$
				1		1					$\Rightarrow 1+1=2$	$\Leftrightarrow 2 = 2^1$
			1		2		1				$\Rightarrow 1+2+1=4$	$\Leftrightarrow 4 = 2^2$
		1		3		3		1			$\Rightarrow 1+3+3+1=8$	$\Leftrightarrow 8 = 2^3$
	1		4		6		4		1		$\Rightarrow 1+4+6+4+1=16$	$\Leftrightarrow 16 = 2^4$
1		5		10		10		5		1	$\Rightarrow 1+5+10+10+5+1=32$	$\Leftrightarrow 32 = 2^5$

Dari jumlah bilangan-bilangan pada setiap baris dari bilangan segitiga pascal di atas, maka dapat dinyatakan bahwa:

Dalam pola bilangan segitiga pascal, jumlah bilangan pada baris ke-*n* adalah $S_n = 2^{n-1}$

Contoh 5.3

Berapakah jumlah bilangan pada segitiga pascal pada baris ke-10.

Penyelesaian:

Jumlah bilangan adalah $S_n = 2^{n-1}$

$= 2^{10-1}$

$= 2^9$

$= 512$

Jadi, jumlah bilangan segitiga pascal pada baris ke-10 adalah 512.

c. Penerapan Bilangan Segitiga Pascal Pada Binomial Newton

Jika a dan b adalah variabel-variabel real yang tidak nol, maka bentuk aljabar $(a + b)$ disebut suku dua atau binomial dalam a dan b. Binomial $(a + b)$ dipangkatkan dengan n (n adalah bilangan-bilangan asli) dituliskan sebagai berikut.

$$(a+b)^n$$

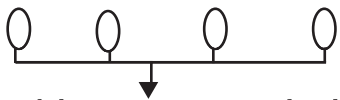
Perhatikan uraian berikut.

$$n=0 \quad \Rightarrow (a+b)^o \quad \Rightarrow \quad 1$$
$$n=1 \quad \Rightarrow (a+b)^1 \quad \Rightarrow \quad a+b$$
$$n=2 \quad \Rightarrow (a+b)^2 \quad \Rightarrow \quad a^2+2ab+b^2$$
$$n=3 \quad \Rightarrow (a+b)^3 \quad \Rightarrow \quad a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
. . . . .

			1			
		1		1		
	1		2		1	
1		3		3		1

Gambar 5.8 Koefisien dari penjabaran binomial newton

$(a+b)^3 = 1\,a^3 + 3\,a^2b + 3\,ab^2 + 1\,b^3$ $\rightarrow$ pangkat *a* turun dan pangkat *b* naik



Barisan bilangan segitiga pascal pada $n = 3$

Contoh 5.4

Dengan bantuan segitiga pascal, uraikanlah $(x + y)^5$.

					1						$\dashrightarrow$ $n = 0$
				1		1					$\dashrightarrow$ $n = 1$
			1		2		1				$\dashrightarrow$ $n = 2$
		1		3		3		1			$\dashrightarrow$ $n = 3$
	1		4		6		4		1		$\dashrightarrow$ $n = 4$
1		5		10		10		5		1	$\dashrightarrow$ $n = 5$

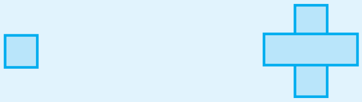
Dari segitiga pascal telah diketahui koefisien penjabaran binom, sehingga:

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

Latihan 5.1

1. Tuliskan barisan bilangan berikut.
   a. Barisan bilangan kelipatan 3 kurang dari 35.
   b. Sepuluh barisan pertam bilangan fibonacci.
   c. Bilangan asli kuadrat kurang dari 200.
2. Gambarkan pola ketiga, keempat, dan kelima dari pola bangun berikut.

   a. 

   b. 

3. Tentukan jumlah 15 bilangan asli genap yang pertama.
4. Tentukan jumlah 15 bilangan asli ganjil yang pertama.
5. Tentukan jumlah bilangan pascal pada baris ke-15.
6. Dengan menggunakan barisan bilangan segitiga pascal, uraikan binomial.
   a. $(p + q)^7$
   b. $(x + y)^8$

B. Barisan Bilangan

1. Pengertian Barisan Bilangan

Masih ingatkah kita tentang susunan bilangan fibonacci, yaitu 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, . . .? Kemudian perhatikan susunan bilangan-bilangan di bawah ini.

a. 1, 3, 6, 10, 15, . . .

b. 2, 4, 8, 16, 32, . . .

Ketiga susunan bilangan di atas disebut barisan bilangan. Adapun aturan pembentukan barisan bilangan tersebut sebagai berikut.

1. 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, . . .

   Aturan pembentukannya, setiap bilangan adalah jumlah dari dua bilangan sebelumnya.

   Suku ke-1 adalah 1

   Suku ke-2 adalah 1 (0 + 1 = 1)

   Suku ke-3 adalah 2 (1 + 1 = 2)

   Suku ke-4 adalah 3 (1 + 2 = 3)

   Suku ke-5 adalah 5 (2 + 3 = 5)

2. 1, 2, 4, 8, 16, 32, . . .

   Aturan pembentukannya adalah untuk setiap bilangan dikalikan 2.

   Suku ke-1 adalah 1

   Suku ke-2 adalah 2 (1 × 2 = 2)

   Suku ke-3 adalah 4 (2 × 2 = 4)

   Suku ke-4 adalah 8 (4 × 2 = 8)

   Suku ke-5 adalah 16 (8 × 2 = 16)

3. 1, 3, 6, 10, 15, . . .

   Aturan pembentukannya adalah ditambah dengan bilangan asli berurutan yang dimulai dari 2.

   Suku ke-1 adalah 1

   Suku ke-2 adalah 3 (1 + 2 = 3)

   Suku ke-3 adalah 6 (3 + 3 = 6)

   Suku ke-4 adalah 10 (6 + 4 = 10)

   Suku ke-5 adalah 15 (10 + 5 = 15)

Barisan bilangan adalah bilangan-bilangan dalam matematika yang diurutkan dengan aturan tertentu. Tiap - tiap bilangan yang terdapat pada barisan bilangan tersebut disebut suku dari barisan itu. Secara umum barisan bilangan dinyatakan dalam bentuk $U_1, U_2, U_3, U_4, \ldots, U_n$, dengan U_1 adalah suku pertama dan U_n adalah suku ke-n.

2. Menentukan Suku Barisan

Untuk menentukan suku-suku barisan bilangan dapat dicari dari melihat suku-suku barisan bilangan yang telah diketahui. Untuk lebih jelasnya perhatikan beberapa contoh berikut.

Contoh 5.5

Tulislah dua suku berikutnya dari masing-masing barisan bilangan berikut.

a. 2, 6, 12, 20, . . .

b. 96, 48, 24, 12, . . .

c. 1, 5, 9, 13, . . .

Penyelesaian:

a. 2, 6, 12, 20, . . .

Barisan bilangan berikutnya dapat dicari dengan menambahkan bilangan asli genap berurutan yang dimulai dari 4 pada suku di depannya.

Dua suku berikutnya adalah 30 dan 42.

b. 96, 48, 24, 12, . . .

Barisan bilangan berikutnya dapat dicari dengan membagi 2 suku di depannya.

Dua suku berikutnya adalah 6 dan 3.

c. 1, 5, 9, 13, . . .

Barisan bilangan berikutnya dapat dicari dengan menambah 4 pada suku di depannya.

Dua suku berikutnya adalah 17 dan 21.

3. Menentukan Suku ke-*n* dari Suatu Barisan

Suku ke-n suatu barisan bilangan dilambangkan dengan U_n. Sedangkan untuk menentukan suku ke-n dapat dicari dengan rumus yang dapat diketahui melalui **aturan pembentukan barisan bilangan.** Proses mencari suku ke-n dengan cara ini dinilai lebih praktis dibandingkan dengan menulis suku demi suku, jika suku yang diminta dalam urutan besar. Hal ini memudahkan siswa dalam mencari/menentukan nilai suku-suku dengan urutan berapapun.

Contoh 5.6

1. Tentukan suku ke-50 dari barisan bilangan 6, 8, 10, 12, ...

   Penyelesaian:

   Karena dilihat dari aturan pembentukan dari suku satu ke suku berikutnya di tambah 2, maka rumus suku ke-*n* memuat 2*n*, yaitu:

   $U_1 = 6 = 2 \times 1 + 4$

   $U_2 = 8 = 2 \times 2 + 4$

   Jadi, $U_n = 2 \times n + 4$

   $= 2n + 4$

   Sehingga $U_{50} = 2 \times 50 + 4$

   $= 104$

2. Tentukan suku ke-30 dari barisan bilangan 4, 9, 16, 25, ...

   Penyelesaian:

   $U_1 = 4 = 2^2 = (1 + 1)^2$ $\quad$ $U_2 = 9 = 3^2 = (2 + 1)^2$

   $U_3 = 16 = 4^2 = (3 + 1)^2$ $\quad$ $U_4 = 25 = 5^2 = (4 + 1)^2$

   Berdasarkan aturan pembentukan barisan bilangan terlihat bahwa pangkat selalu 2, sedangkan bilangan pokoknya adalah urutan suku ditambah 1, maka:

   $U_n = (n + 1)^2$

   Jadi, $U_{30} = (30 + 1)^2$

   $= 31^2$

   $= 961$

3. Tentukan lima suku pertama dari suatu barisan bilangan, jika suku ke-*n* adalah $n(2n + 3)$.

   Penyelesaian:

   $U_n = n(2n + 3)$

   $U_1 = 1 \times (2 \times 1 + 3) = 1 \times 5 = 5$ $\quad$ $U_2 = 2 \times (2 \times 2 + 3) = 2 \times 7 = 14$

$U_3 = 3 \times (2 \times 3 + 3)$
$= 3 \times 9$
$= 27$

$U_4 = 4 \times (2 \times 4 + 3)$
$= 4 \times 11$
$= 44$

$U_5 = 5 \times (2 \times 5 + 3)$
$= 5 \times 13$
$= 65$

Jadi, lima suku pertama adalah 5, 14, 27, 44, 65.

Latihan 5.2

1. Tentukan suku pertama (U_1) sampai suku ke-10 (U_{10}) dari barisan-barisan berikut.
   a. 1, 4, 9, 16, . . .
   b. 1, 3, 6, 10, 15, . . .
   c. 4, 6, 10, 18, 34, . . .
   d. 4, 7, 12, 19, 28, . . .
2. Tentukan suku ke 20 dari barisan bilangan berikut.
   a. 4, 5, 6, 7, 8, . . .
   b. 3, 8, 15, 24, 35, . . .
   c. $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \ldots$

C. Barisan dan Deret Aritmatika

1. Barisan Aritmatika

Dalam pembahasan sebelumnya, telah diketahui bahwa barisan bilangan dinyatakan dalam bentuk $U_1, U_2, U_3, U_4, \ldots, U_n$. Barisan bilangan ini disebut sebagai **barisan bilangan aritmatika**, jika selisih dua suku yang berurutan selalu tetap. Selisih tersebut dinamakan beda dan dilambangkan dengan "b".

Jadi, $b = U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = U_4 - U_3 = \ldots = U_n - U_{n-1}$.

Jika dalam barisan aritmatika tersebut suku pertama dinyatakan dengan a, maka bentuk umum barisan aritmatika adalah:

$$a,\ a + b,\ a + 2b,\ a + 3b,\ \ldots,\ a+(n-1)b$$

Contoh 5.7

1. 1, 4, 7, 10, . . .

   $b = U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = U_4 - U_3$

   $b = 4 - 1 = 7 - 4 = 10 - 7 = 3$

   Karena barisan bilangan tersebut mempunyai beda yang tetap yaitu 3, maka barisan itu merupakan barisan aritmatika.

2. 2, 5, 7, 9 , . . .

   $b = U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = U_4 - U_3$

   $U_2 - U_1 = 5 - 2 = 3$

   $U_3 - U_2 = 7 - 5 = 2$

   $U_4 - U_3 = 9 - 7 = 2$

   Karena barisan bilangan tersebut mempunyai beda yang tidak tetap, maka barisan tersebut bukan barisan aritmatika.

2. Deret Aritmatika

Dari pengertian barisan bilangan pada pembahasan sebelumnya, jika semua suku-suku pada barisan aritmatika dijumlahkan akan terbentuk suatu **deret aritmatika** atau deret hitung. Sehingga bentuk umum deret aritmatika adalah:

$$a + (a + b) + (a + 2b) + (a + 3b) + \ldots + \{a + (n - 1)b\}$$

Deret aritmatika yang mempunyai beda lebih dari nol atau positif, maka deretnya disebut deret aritmatika naik. Sedangkan deret aritmatika yang mempunyai beda kurang dari nol atau negatif, maka deretnya disebut deret aritmatika turun.

Contoh 5.8

1. Apakah 2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17 + . . . deret aritmatika?

   $U_2 - U_1 = 5 - 2 = 3$ $\qquad$ $U_4 - U_3 = 11 - 8 = 3$

   $U_3 - U_2 = 8 - 5 = 3$ $\qquad$ $U_5 - U_4 = 14 - 11 = 3$

   Karena bedanya selalu tetap yaitu 3, maka 2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17 + . . . adalah deret aritmatika atau deret hitung.

2. Apakah 2 + 6 + 10 + 14 + 18 + . . . deret aritmatika?

$U_2 - U_1 = 6 - 2 = 4$ $\quad$ $U_4 - U_3 = 14 - 10 = 4$

$U_3 - U_2 = 10 - 6 = 4$ $\quad$ $U_5 - U_4 = 18 - 14 = 4$

Karena bedanya selalu tetap yaitu 4, maka 2 + 6 + 10 + 14 + 18 + . . . adalah deret aritmatika atau deret hitung.

a. *Rumus Suku ke-n Deret Aritmatika*

Apabila a menyatakan suku pertama, n menyatakan banyak suku, dan b adalah beda suatu barisan aritmatika, maka:

$U_1 = a$

$U_2 = a + b$

$U_3 = a + 2b$

. . .

$U_n = a + (n - 1)b$

Jadi, suku ke-n barisan aritmatika (U_n) dirumuskan sebagai:

$$\boxed{U_n = a + (n - 1)b}$$

b. *Jumlah n Suku Pertama Deret Aritmatika*

Untuk memudahkan perhitungan, berikut ini akan dicari rumus menentukan jumlah n suku pertama deret aritmatika.

$U_1 = a$

$U_2 = a + b$

$U_3 = a + 2b$

. . .

$U_n = a + (n - 1)b$ $\quad +$

$S_n = a + a + a + . . . + b + 2b + 3b + . . . + (n-1)\, b$

$S_n = na + b + 2b + 3b + . . . + (n-1)\, b$

$\quad = na + \{(1 + 2 + 3 + . . . + (n-1)\}b$

Ingat bahwa:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-3) + (n-2) + (n-1)$$

$+$

$+$

$+$

didapat:

$$\begin{aligned}\{1+(n-1)\}+\{2+(n-2)\}+\{3+(n-3)\}+\ldots &= n+n+n+\ldots \\ &= \frac{n-1}{2}\times n\end{aligned}$$

Sehingga:

$$\begin{aligned}S_n &= na+\{1+2+3+\ldots+(n-1)\}b \\ &= na+\left(\frac{n-1}{2}\times n\right)b \\ &= \frac{n}{2}\{2a+(n-1)b\} \\ &= \frac{n}{2}(a+U_n)\end{aligned}$$

Jadi, rumus jumlah n suku pertama deret aritmatika adalah:

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a+(n-1)b\}$$

atau

$$S_n = \frac{n}{2}(a+U_n)$$

c. *Suku Tengah Deret Aritmatika*

Dalam deret aritmatika jika n ganjil, maka suku tengah (U_t) deret aritmatika tersebut terletak di tengah-tengah antara U_1 dan U_n dan dirumuskan sebagai:

$$U_t = \frac{1}{2}(a+U_n)$$

d. *Sisipan pada Deret Aritmatika*

Misalkan $U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \ldots + U_n$ adalah deret aritmatika dengan suku pertama $U_1 = a$, beda $= b$, dan banyaknya suku $= n$. Apabila di antara dua suku deret aritmatika tersebut disisipkan k buah bilangan (suku baru) sehingga membuat deret aritmatika baru, maka:

Deret semula:

$$a + (a+b) + (a+2b) + \ldots$$

Deret baru:

$$a + \underbrace{(a+b) + (a+2b) + \ldots + (a+kb)}_{k \text{ suku baru}} + (a + (k+1)b) + \ldots$$

Dari deret semula dan deret baru diperoleh hubungan

1. Beda baru (b')

$$b' = \frac{b}{k+1}$$

2. Banyaknya suku baru (n')

$$n' = n + (n+1)k$$

3. Jumlah n suku pertama sesudah sisipan (S_n')

$$S_n' = \frac{n'}{2}(a + U_n')$$

3. Sifat-sifat Deret Aritmatika

Masih ingatkah kita dengan rumus suku ke-n dan jumlah n suku pertama pada deret aritmatika? Nah, dari rumus suku ke-n dan jumlah n suku pertama pada deret aritmatika tersebut kita akan menemukan sifat-sifat deret aritmatika.

Bentuk umum dari suatu deret aritmatika adalah:

$$a + (a+b) + (a+2b) + \ldots + \{a + (n-1)b\}$$

Berikut ini akan diuraikan beberapa sifat lain pada deret aritmatika.

Misalkan diketahui deret aritmatika 2 + 6 + 10 + 14 + 18 + . . . , a = 2, b = 4

Jika: $U_3 - U_1 = U_3 - U_{(3-2)} = 10 - 2 = 8$

$$U_5 - U_2 = U_5 - U_{(5-3)} = 18 - 6 = 12$$

$$U_5 - U_1 = U_5 - U_{(5-4)} = 18 - 2 = 16$$

Sehingga: $U_3 - U_{(3-2)} = 8 = 4 \times 2$

$U_5 - U_{(5-3)} = 12 = 4 \times 3$

$U_5 - U_{(5-4)} = 12 = 4 \times 4$

Dari uraian di atas maka:

$$U_n - U_{(n-p)} = b \times p$$ .... (sifat 1)

Dalam pembahasan sebelumnya telah kita ketahui bahwa:

$$S_n = \frac{n}{2}(a + U_n) = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)b\}$$ .... (sifat 2)

Jika banyak suku barisan aritmatika ganjil dan suku tengahnya adalah U_t maka:

$$\begin{aligned} U_t &= \frac{1}{2}(a + U_n) \\ &= \frac{1}{2}(a + a + (n-1)b) \\ &= \frac{1}{2}(2a + (n-1)b) \\ &= a + (n-1) \times \frac{b}{2} \end{aligned}$$

$$U_t = a + (n-1) \times \frac{b}{2}$$ .... (sifat 3)

4. Hubungan antara S_n dan U_n

$$
\begin{array}{ll}
S_n & = a + (a+b)+(a+2b)+ \ldots + (a+(n-2)b)+(a+(n-1)b) \\
S_{n-1} & = a + (a+b)+(a+2b)+ \ldots + (a+(n-2)b) \\
\hline
S_n - S_{n-1} & = a + (n-1)b \\
& = U_n
\end{array} \quad -
$$

$S_n - S_{n-1} = U$ .... (sifat 4)

Latihan 5.3

1. Carilah beda dan suku ke-n, jika diberikan barisan aritmatika sebagai berikut:
   a. 5, 9, 13, 17, . . .
   b. 10, 16, 22, 28, . .
   c. 2, 7, 12, 17, . . .
2. Carilah suku yang diminta dalam setiap barisan aritmatika berikut ini.
   a. 5, 9, 13, 17, . . . suku ke-20
   b. 10, 16, 22, 28, . . suku ke-15
   c. 2, 7, 12, 17, . . suku ke-30
3. Tentukan banyak suku dari deret aritmatika berikut.
   a. 10 + 17 + 24 + 31 + ... +115
   b. 7 + 13 + 19 + 25 + ... + 463
4. Dalam sebuah deret aritmaika U_3 = 22 dan U_8 = 52, maka tentukan suku ke-15.
5. Tentukan jumlah dari deret aritmatika 82 + 78 + 74 + ... + 10.
6. Suku pertama dari deret aritmatika adalah 11 dan suku tengahnya adalah 41. Tentukan suku terakhir dari deret aritmatika tersebut.
7. Di antara dua suku yang berurutan pada deret 2 + 10 + 18 + 26 + 34 + 42 disisipkan 4 bilangan sehingga membentuk deret aritmatika yang baru. Tentukan:
   a. besar deret yang baru,
   b. banyak suku pada deret yang baru,
   c. jumlah deret yang baru.

8. Suatu barisan bilangan mempunyai aturan $U_n = 100 - 3n$.
   a. Tentukan suku-suku ke–8, ke–15, dan ke–32.
   c. Suku keberapakah 58 itu?
9. Seorang anak menabung di bank. Bulan pertama, ia menabung Rp10.000,00, bulan kedua ia menabung Rp13.000,00, bulan ketiga ia menabung Rp 16.000,00, dan bulan keempat ia menabung Rp19.000,00. Demikian seterusnya, ia selalu menabung Rp3.000,00 lebih banyak dari bulan sebelumnya.
   a. Berapa rupiahkah ia menabung pada bulan ke–11?
   b. Tabungan bulan ke berapakah yang besarnya Rp67.000,00.
10. Dari hari ke hari Umar mengumpulkan buah-buahan yang akan dikirim ke pasar. Hari pertama, terkumpul 150 kg, hari kedua terkumpul 165 kg, hari ketiga terkumpul 180 kg, hari keempat terkumpul 195 kg. Demikian seterusnya sehingga hari berikutnya selalu memperoleh 15 kg lebih berat daripada hari sebelumnya. Hari keberapakah ia memperoleh buah 225 kg? Berapakah banyak buah selama 1 minggu?

D. Barisan dan Deret Geometri

1. Barisan Geometri

Setelah kita mempelajari barisan dan deret aritmatika, maka dalam pembahasan selanjutnya akan kita pelajari barisan dan deret geometri. Suatu barisan $U_1, U_2, U_3, U_4, \ldots, U_n$ disebut barisan geometri jika perbandingan dua suku yang berurutan selalu tetap. Perbandingan antara dua suku yang berurutan itu disebut pembanding atau rasio, biasanya dilambangkan dengan " r " .

Jadi, $r = \dfrac{U_2}{U_1} = \dfrac{U_3}{U_2} = \dfrac{U_4}{U_3} = \ldots = \dfrac{U_n}{U_{n-1}}$

Jika suku pertama dinyatakan dengan a, maka bentuk umum barisan geometri adalah:

$$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots ar^{n-1}$$

Contoh 5.9

1. Tentukan apakah 2, 4, 8, 16, . . . merupakan barisan geometri.

   Penyelesaian:

   Kita tentukan apakah rasio dua suku yang berurutan adalah sama.

   $$\frac{U_2}{U_1} = \frac{4}{2} = 2$$

   $$\frac{U_3}{U_2} = \frac{8}{4} = 2$$

   $$\frac{U_4}{U_3} = \frac{16}{8} = 2$$

   Karena rasio dua suku yang berurutan sama, maka barisan tersebut merupakan barisan geometri.

2. Tentukan suku ke-6 barisan geometri:

   $a^x, a^{2x}, a^{3x}, a^{4x}, \ldots .$

   Penyelesaian:

   Suku pertama a^x

   $$\text{Rasio} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{a^{2x}}{a^x} = a^x$$

Suku ke-n $= a^x \times r^{n-1}$

$= a^x(a^x)^{n-1}$

$= a^x \times a^{xn-x}$

$= a^{nx}$

Suku ke-6 $= a^{6x}$

2. Deret Geometri

Seperti halnya deret aritmatika, apabila suku-suku pada barisan geometri dijumlahkan maka akan terbentuk deret geometri atau deret ukur. Sehingga bentuk umum deret geometri adalah:

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1}$$

Pada deret geometri $U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \ldots + U_n$, jika $U_{n+1} > U_n$ maka deretnya disebut deret geometri naik, dan jika $U_{n+1} < U_n$, maka deretnya disebut deret geometri turun.

Contoh 5.10

Diketahui deret 2 + 6 + 18 + 54 + 162 + . . .

$\frac{U_2}{U_1} = \frac{6}{2} = 3$ $\frac{U_4}{U_3} = \frac{54}{18} = 3$

$\frac{U_3}{U_2} = \frac{18}{6} = 3$ $\frac{U_5}{U_4} = \frac{162}{54} = 3$

Karena rasionya selalu tetap yaitu 3, maka deret 2 + 6 + 18 + 54 + 162 + . . . disebut deret geometri. Karena $U_{n+1} > U_n$, maka 2 + 6 + 18 + 54 + 162 + . . . juga disebut deret geometri naik.

a. Rumus Suku ke-n Deret Geometri

Apabila *a* menyatakan suku pertama deret geometri, *n* menyatakan banyak suku, dan *r* menyatakan rasio, maka suku ke-*n* (U_n) deret geometri dirumuskan sebagai berikut.

$$Un = ar^{n-1}$$

Contoh 5.11

1. Diketahui deret geometri 3 + 6 + 12 + 24 + ...

   Tentukan suku ke-13 dari deret geometri tersebut.

   Penyelesaian:

Deret geometri 3 + 6 + 12 + 24 + . . .

$$r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} = \ldots$$

$$r = \frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \frac{24}{12} = 2$$

Suku ke-n = $U_n = ar^{n-1}$

Suku ke-13 = $U_{13} = 3 \cdot 2^{13-1} = 3 \cdot 2^{12} = 3 \cdot 4.096$
$= 12.288$

2. Jika diketahui deret geometri dengan suku pertama adalah 3 dan rasionya 4, maka tentukan 5 suku pertama.

Penyelesaian:

Diketahui $a = 3$, $r = 4$

$$U_2 = ar = 3 \times 4 = 12$$

$$U_3 = ar^2 = 3 \times 4^2 = 3 \times 16 = 48$$

$$U_4 = ar^3 = 3 \times 4^3 = 3 \times 64 = 192$$

$$U_5 = ar^4 = 3 \times 4^4 = 3 \times 256 = 768$$

Jadi, deret geometri tersebut adalah 3 + 12 + 48 + 192 + 768.

b. Jumlah n Suku Pertama Pada Deret Geometri

Untuk dapat mengetahui jumlah n suku pertama (S_n) suatu deret geometri dapat ditentukan dengan rumus sebagai berikut.

$$S_n = \frac{a\left(r^n - 1\right)}{r - 1} \text{ untuk } r > 1$$

atau

$$S_n = \frac{a\left(1 - r^n\right)}{1 - r} \text{ untuk } r < 1$$

Hubungan antara U_n dan S_n adalah $U_n = S_n - S_{n-1}$.

Contoh 5.12

Jumlah 6 suku pertama dari deret geometri 3 + 6 + 12 + 24 + . . . ditentukan dengan cara berikut.

$$a = 3, \quad n = 6 \quad r = \frac{6}{3} = 2 \quad (r > 1)$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a\left(r^n - 1\right)}{r - 1} \\ S_6 &= \frac{3\left(2^6 - 1\right)}{2 - 1} \\ &= \frac{3 \times 63}{1} \\ &= 3 \times 63 \\ &= 189 \end{aligned}$$

Jadi, jumlah 6 suku pertama dari deret geometri 3 + 6 + 12 + 24 + . . . adalah 189.

c. *Suku Tengah Deret Geometri*

Suku tengah suatu deret geometri (U_t) terletak di tengah-tengah antara a dan U_n dengan banyak suku ganjil. Suku tengah deret geometri dapat ditentukan dengan menggunakan rumus berikut.

$$U_t = \sqrt{a \times U_n}$$

Contoh 5.13

Tentukan suku tengah dari deret 2 + 6 + 18 + 54 + . . . + 1.458.

Penyelesaian:

Diketahui:

$a \;\; = 2$

$U_n = 1.458$

$$\begin{aligned} U_t &= \sqrt{a \times U_n} \\ &= \sqrt{2 \times 1.458} \\ &= \sqrt{2.916} \\ &= 54 \end{aligned}$$

Jadi, suku tengah dari deret geometri 2 + 6 + 18 + 54 + . . . + 1.458 adalah 54.

d. *Sisipan pada Deret Geometri*

Misalkan diketahui deret geometri $U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \ldots + U_n$. Apabila di antara dua suku yang berurutan disisipkan k buah suku baru sehingga membentuk deret geometri yang baru, r adalah rasio deret awal, dan n banyaknya suku awal, maka diperoleh:

1) Rasio baru (r')

   $r' = \sqrt[k+1]{r}$ jika banyak suku yang disisipkan genap.

   $r' = \sqrt[k+1]{r}$ ika banyak suku yang disisipkan ganjil.

2) Banyaknya suku baru (n')

   $n' = n + (n-1)k$

3) Jumlah n suku pertama sesudah sisipan (S_n')

$$S_n' = \frac{a\left((r')^{n'} - 1\right)}{r' - 1}; \text{ untuk } r' > 1$$

atau

$$S_n' = \frac{a\left(1 - (r')^{n'}\right)}{1 - r'}; \text{ untuk } r' < 1$$

3. Sifat-sifat Deret Geometri

Tidak hanya deret aritmatika, deret geometri juga mempunyai sifat-sifat yang dapat dikenali. Dengan menggunakan rumus suku ke-*n* dan jumlah *n* suku pertama pada deret geometri kita akan menemukan sifat -sifat lain.

Bentuk umum deret geometri adalah:

$$a+ar+ar^2+ar^3+.....+ar^{n-1}$$

Misalkan untuk sebuah deret geometri 2 + 6 + 18 + 54 + . . .

$a=2,\ \ r= \frac{6}{2} =3$

Jika :

$$\frac{U_4}{U_1} = \frac{U_4}{U_{(4-3)}} = \frac{54}{2} = 27 \Leftrightarrow \qquad \frac{U_4}{U_{(4-3)}} = 27 = 3^3$$

$$\frac{U_4}{U_2} = \frac{U_4}{U_{(4-2)}} = \frac{54}{6} = 9 \Leftrightarrow \qquad \frac{U_4}{U_{(4-2)}} = 9 = 3^2$$

$$\frac{U_4}{U_3} = \frac{U_4}{U_{(4-1)}} = \frac{54}{18} = 3 \Leftrightarrow \qquad \frac{U_4}{U_{(4-1)}} = 3 = 3^1$$

Dari uraian di atas, maka:

$\frac{U_n}{U_{(n-p)}} = r^p$ .... (sifat 1)

Adapun sifat-sifat deret geometri yang lain adalah:

$U_t = \sqrt{a \times U_n}$ .... (sifat 2)

$S_n - S_{(n-1)} = \iota$ .... (sifat 3)

Latihan 5.4

1. Carilah rasio dan suku ke-*n* dari deret geometri berikut.
   a. 2+(-6)+18+(-54)+162+.....
   b. -3+6+(-12)+....
2. Carilah suku yang diminta dalam setiap barisan berikut ini.
   a. 2+(-6)+18+(-54)+162+..... suku ke-20
   b. -3+6+(-12)+.... suku ke-16
3. Carilah banyak suku dari deret geometri $625 + 125 + 25 + \ldots + \frac{1}{31.25}$
4. Dalam suatu deret geometri diketahui suku pertama dan suku kelima berturut-turut 6 dan 486. Tentukan besar rasio dari deret tersebut.
5. Tentukan jumlah 18 suku pertama dari deret 5 + 10 + 20 + 40 + ...
6. Di antara bilangan 3 dan 96 disisipkan tiga buah bilangan sehingga membentuk deret geometri. Tentukan
   a. besar rasio deret tersebut,
   b. jumlah deret tersebut.
7. Jumlah deret geometri tak hingga $3 - \frac{9}{5} + \frac{27}{25} + \frac{81}{125} + \ldots$
8. Jika deret geometri tak hingga adalah 12, dan suku pertama adalah 4, berapa besar suku kelima?
9. Andi menabung di bank dengan modal awal sebesar Rp500.000,00 dan bunga 3% per tahun. Bank tersebut menggunakan bunga majemuk (bunga berbunga). Tentukan besar tabungan setelah 4 tahun.
10. Diketahui tiga bilangan $x - 1$, $x - \frac{5}{2}$, $x - \frac{7}{4}$. Jika ketiga bilangan tersebut membentuk geometri, tentukan jumlah tak hingga dari barisan tersebut.

E. Memecahkan Masalah Barisan dan Deret

Dalam kehidupan sehari-hari kadang banyak kita temui permasalahan-permasalahan dalam bentuk barisan dan deret. Untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan tersebut tentunya juga menggunakan aturan-aturan yang ada pada deret dan barisan.

Berikut ini adalah beberapa contoh permasalahan-permasalahan dalam bentuk barisan dan deret.

Contoh 5.14

1. Tiga buah bilangan membentuk deret aritmatika. Jumlah ketiga bilangan tersebut adalah 36 dan hasil kalinya 1.536. Tentukan bilangan-bilangan tersebut.

Penyelesaian:

Misalkan tiga buah bilangan tersebut adalah $a - b$, a, $a + b$, maka:

$(a + b)+a+(a+b) =36$

$\Leftrightarrow \quad a - b-+a+a+b =36$

$\Leftrightarrow \quad 3a =36$

$\Leftrightarrow \quad a =12$

$(a - b)' a'+(a+b) =1.536$

$\Leftrightarrow \quad (a^2 - b^2)a = 1.536$

$\Leftrightarrow \quad (12^2 - b^2)12 = 1.536$

$\Leftrightarrow \quad (114^2 - b^2)12 = 1.536$

$\Leftrightarrow \quad (114 - b^2) = 128$

$\Leftrightarrow \quad b^2 = 16$

$\Leftrightarrow \quad b = 4$

Jadi tiga buah bilangan tersebut adalah:

$a - b = 12 - 4$

$= 8$

$a + b = 12 + 4$

$= 16$

2. Firli menabung di sebuah bank. Pada bulan Januari ia menabung sebesar Rp150.000,00, bulan Februari sebesar Rp210.000,00, bulan Maret sebesar Rp270.000,00, dan seterusnya.Berapakah jumlah uang yang ditabung Firli sampai bulan Desember pada tahun yang sama?

Penyelesaian:

bulan Januari $= U_1 =$ Rp150.000,00

bulan Februari $= U_2 =$ Rp210.000,00

bulan Maret $= U_3 =$ Rp270.000,00

$$\begin{aligned} b &= U_2 - U_1 \\ &= 210.000 - 150.000 \\ &= 60.000, \text{ maka} \\ U_{12} &= U_1 + (12-1)b \\ &= 150.000 + 11 \times 60.000 \\ &= 150.000 + 660.000 \\ &= 810.000 \end{aligned}$$

Jumlah uang sampai bulan Desember adalah:

$$\begin{aligned} S_{12} &= \frac{12}{2}(U_1 + U_{12}) \\ &= 6(150.000 + 810.000) \\ &= 6 \times 960.000 \\ &= 5.760.000 \end{aligned}$$

Jadi jumlah uang Firli sampai bulan Desember adalah Rp5.760.000,00.

3. Sebuah konveksi pakaian jadi, pada bulan Maret dapat menyelesaikan 500 baju, pada bulan April 525 baju, bulan Mei 550 baju, dan seterusnya.Berapakah banyak baju yang dapat dihasilkan pada bulan Desember tahun yang sama?

Penyelesaian:

bulan Maret = U_1 = 500

bulan April = U_2 = 525

bulan Mei = U_3 = 550

Banyak baju yang di hasilkan pada bulan Desember adalah:

$$\begin{aligned} U_{10} &= U_1 + (10-1)b \\ &= 500 + 9 \times 25 \\ &= 500 + 225 \\ &= 725 \end{aligned}$$

Jadi, banyak baju yang dihasilkan pada bulan Desember adalah 725 buah.

4. Dalam suatu gedung pertemuan terdapat 10 kursi pada baris pertama, dan bertambah 6 kursi untuk baris-baris seterusnya. Jika gedung itu dapat memuat 15 baris kursi, maka tentukan:

a. rumus suku ke-*n* yang menyatakan banyak kursi pada baris ke-*n*,

b. banyak kursi pada baris terakhir,

c. banyak kursi dalam gedung tersebut.

Penyelesaian:

Diketahui $a = 10$; $b = 6$, $n = 15$

a. Rumus suku ke-*n*

$$\begin{aligned} U_n &= a + (n-1)b \\ &= 10 + (n-1)6 \\ &= 10 + 6n - 6 \\ &= 4 + 6n \end{aligned}$$

b. Banyak kursi pada baris terakhir, yaitu baris ke-15

$$\begin{aligned} U_n &= 4+6n \\ U_{15} &= 4+6\times 15 \\ &= 4+90 \\ &= 94 \end{aligned}$$

c. Banyak kursi dalam gedung (S_{15})

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}(a+U_n) \\ S_{15} &= \frac{15}{2}(10+U_{15}) \\ &= \frac{15}{2}(10+94) \\ &= \frac{15}{2}\times 104 \\ &= 15\times 52 \\ &= 780 \end{aligned}$$

5. Sebuah bola dijatuhkan dari ketinggian 20 m ke lantai dan memantul dengan tinggi pantulan mancapai $\frac{3}{5}$ kali tinggi sebelumnya. Pantulan ini berlangsung terus menerus sampai bola berhenti. Hitunglah panjang lintasan bola tersebut.

Penyelesaian:

Lintasan pertama

$a = 20\,m,\ r = \frac{3}{5}$

$$\begin{aligned} S_\infty &= \frac{a}{1-r} \\ &= \frac{20}{1-\frac{3}{5}} \\ &= \frac{20}{\frac{2}{5}} \\ &= 50 \end{aligned}$$

Lintasan kedua

$a = \frac{3}{5} \times 20 = 12,\ r = \frac{3}{5}$

$$\begin{aligned} S_\infty &= \frac{a}{1-r} \\ &= \frac{12}{1-\frac{3}{5}} \\ &= \frac{12}{\frac{2}{5}} \\ &= 30 \end{aligned}$$

Jadi panjang lintasan bola sampai berhenti adalah 50 + 30 = 80 m.

Rangkuman

1. Jumlah n bilangan asli ganjil pertama: $1 + 3 + 5 + \ldots = n^2$.
2. Jumlah n bilangan asli genap pertama: $2 + 4 + 6 + \ldots n = n(n + 1)$.
3. Jumlah bilangan pada baris ke-n bilangan segitiga pascal = $S_n = 2^{n-1}$.
4. $U_1, U_2, U_3, \ldots U_n$ disebut barisan aritmatika jika:
   $U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = \ldots = U_n - U_{n-1} = b$
5. Rumus suku ke-n barisan aritmatika:
   $U_n = a + (n - 1)b$
6. Rumus suku ke-n barisan geometri:
   $U_n = ar^{n-1}$
7. Sisipan pada deret aritmatika

   beda = $b' = \dfrac{b}{k+1}$

   banyak suku baru = $n' = n + (n + 1)k$

   jumlah suku pertama setelah sisipan: $S_n' = \dfrac{n}{2}(a + U_n)$

8. Suku tengah deret aritmatika

$$U_t = \frac{n}{2}(a + U_n)$$

9. Jumlah n suku pertama deret aritmatika:

$$S_n = \frac{1}{2} n(a + U_n) = \frac{1}{2} n(a + (n-1)b)$$

10. Jumlah n suku pertama deret geometri:

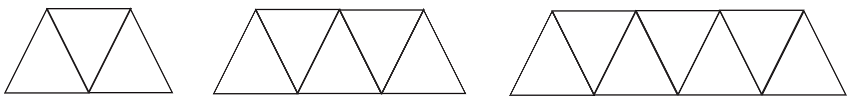
$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}; \text{ untuk } r > 1$$

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}; \text{ untuk } r > 1$$

Uji Kompetensi

A. Pilihlah satu jawaban yang paling benar dengan cara memberi tanda silang (X) pada huruf *a*, *b*, *c*, atau *d*!

1. Gambar di bawah ini menunjukkan pola suatu barisan yang disusun dari batang korek api.

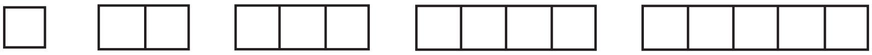


Banyak korek api pada pola berikutnya adalah . . . buah.

a. 12   c. 15

b. 13   d. 19

2. Pola di bawah dibuat dari potongan lidi. Banyak potongan lidi pada pola ke-6 adalah . . . buah.



a. 25   c. 19

b. 16   d. 22

3. Jumlah bilangan ganjil dari 2 sampai dengan 30 adalah . . . .
   a. 183 c. 373
   b. 240 d. 380
4. Pada pola segitiga pascal di bawah ini, jumlah bilangan-bilangan pada baris ke-9 adalah . . . .

				1				
			1		1			
		1		2		1		
	1		3		3		1	
1		4		6		4		1

   a. 256 c. 1.024
   b. 512 d. 1.118
5. Diketahui barisan bilangan 3, 4, 7, 12, 19, ...
   Pola dari urutan bilangan di atas dinyatakan dengan kata-kata adalah . . . .
   a. tambahkan bilangan $n + 1$
   b. tambahkan bilangan prima
   c. tambahkan bilangan $n – 2$
   d. tambahkan bilangan ganjil
6. Dua suku berikutnya dari barisan 8, 16, 27, 41, ... adalah . . . .
   a. 48 dan 70 c. 40 dan 48
   b. 58 dan 78 d. 40 dan 56
7. Suku berikutnya dari barisan 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... adalah . . . .
   a. 21 c. 23
   b. 22 d. 24
8. Rumus suku ke-n dari barisan 6, 10, 14, 18, ... adalah . . . .
   a. $4n + 2$ c. $4n + 1$
   b. $2n + 3$ d. $6n – 2$
9. Rumus suku ke-n dari barisan 1, 6, 15, 28, ... adalah . . . .
   a. $n(2n – 1)$ c. $n(n + 2)$
   b. $2n^2 – 2$ d. $4n – 3$

10. Rumus suku ke-n dari barisan 4, 8, 16, 32, ... adalah . . . .

    a. 2^{n+1} c. 2^{n-1}
    b. 2^{n-1} d. 2^{n-1}

11. Diketahui barisan aritmatika dengan U_1 = 2 dan bedanya = 3. Barisan bilangan itu adalah . . . .

    a. 1, 4, 9, 20, ... c. 6, 12, 18, 24, ...
    b. 1, 3, 8, 12, ... d. 5, 18, 27, 37, ...

12. Suku ke-60 dari barisan 12, 18, 24, 30, ... adalah . . . .

    a. 450 c. 489
    b. 456 d. 496

13. Empat suku pertama barisan dengan rumus suku ke-n, $U_n = 3 \times 2^n$ adalah . . . .

    a. 6, 12, 24, 48 c. 2, 6, 12, 24
    b. 6, 12, 27, 48 d. 3, 6, 12, 27

14. Banyak suku-suku barisan bilangan 1, 5, 9, 10, ..., 60 adalah . . . .

    a. 15 c. 17
    b. 16 d. 18

15. Jumlah 6 suku pertama dari barisan 17, 13, 9, 5, ..., adalah . . . .

    a. 145 c. 24
    b. 45 d. –48

B. Jawablah pertanyaan-pertanyaan di bawah ini dengan benar!

1. Tentukan dua suku berikutnya dari barisan 100, 90, 81, 73, 66.
2. Perhatikan barisan Fibonacci berikut. 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...
   Berapakah suku ke-20 barisan itu?
3. Tentukan rumus suku ke-n barisan $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...$
4. Tentukan tujuh suku pertama suatu barisan dengan suku ke-n, $U_n = n^3 - 1$.
5. Berapakah jumlah 8 suku pertama dari barisan: 3, -12, 48, ... ?

A. Pilihlah satu jawaban yang paling benar dengan cara memberi tanda silang (X) pada huruf *a, b, c,* atau *d*!

1. Diketahui barisan bilangan 2, 3, 5, 11, 18, ...

   Pola dari urutan bilangan di atas bila dinyatakan dengan kata-kata adalah . . . .

   a. tambahkan bilangan $n + 1$
   b. tambahkan bilangan prima
   c. tambahkan bilangan $n - 2$
   d. tambahkan bilangan ganjil

2 Pada pola segitiga pascal jumlah bilangan-bilangan pada baris ke-9 adalah . . . .

   a. 1024 c. 256
   b. 512 d. 128

3. Tabel berikut menunjukkan hubungan antara X dan Y.

Y	1	2	3	4	....
X	1	9	17	31	....

   Untuk X = 7, maka nilai Y adalah . . . .

   a. 42 c. 57
   b. 49 d. 63

4. Dua suku berikut dari barisan 1, 9, 25, 46, ... adalah . . . .

   a. 73 dan 106 c. 72 dan 106
   b. 75 dan 108 d. 76 dan 108

5. Suku ke-6 dan ke-7 dari barisan bilangan 1, 2, 4, 7, 13, ... adalah . . . .

   a. 20 dan 31 c. 24 dan 31
   b. 20 dan 32 d. 24 dan 32

6. Dua suku berikutnya dari barisan bilangan 1, 7, 3, 11, 5, 15, ... adalah . . . .

   a. 9 dan 23 c. 7 dan 21
   b. 9 dan 21 d. 7 dan 19

7. Suku ke-10 dari barisan bilangan 1, 3, 6, 10, ... adalah . . . .

a. 32
b. 36
c. 48
d. 55

8. Rumus suku ke-*n* dari barisan bilangan 12, 57, 132, 237, ... adalah . . . .

a. $4n^2 + 8$
b. $14n^2 - 2$
c. $15n^2 - 3$
d. $10n^2 + 2$

9. Suku ke-*n* dari barisan 4, 7, 12, .. adalah . . . .

a. $2n + 2$
b. $n^2 + 3$
c. $3n + 1$
d. $n^3 + 3$

10. Rumus suku ke-*n* dari barisan $\frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, ...,$ adalah . . . .

a. $U_n = \frac{n}{n(n+2)}$
b. $U_n = \frac{1}{n+2)}$
c. $U_n = \frac{n+1}{n+2}$
d. $U_n = \frac{n}{n+2}$

11. Diketahui U_n adalah "usia anak ke-*n*" dengan $(U_1 - U_2)$, $(U_2 - U_3)$, $(U_3 - U_4)$, $(U_4 - U_5)$, adalah 2 tahun, 2,5 tahun, 3,5 tahun, 5 tahun. Jika usia ibu dari anak-anak ini pada waktu melahirkan anak ke-1 adalah 22 tahun, maka pada saat anak ke-6 berusia 11 tahun usia ibu tersebut adalah . . . .

a. 51 tahun
b. 47,5 tahun
c. 46 tahun
d. 45,5 tahun

12. Barisan bilangan yang suku ke-*n* dirumuskan $U_n = 5n - 2$ adalah . . . .

a. 3, 5, 8, 11, ...
b. 3, 6, 10, 15, ...
c. 3, 7, 13, 18, ...
d. 3, 5, 7, 9, ...

13. Hasil perhitungan dari $2\sqrt{3} + \sqrt{48} - \sqrt{27}$ . . . .

a. $3\sqrt{3}$
b. $3\sqrt{2}$
c. $2\sqrt{3}$
d. $2\sqrt{2}$

14. Jika $x = 36$ dan $y = 64$, maka adalah $x^{\frac{3}{2}} y^{\frac{1}{2}}$ . . . .

a. 1.032
b. 1.278
c. 1.287
d. 1.728

15. Jika $\left(\frac{1}{3}\right)^{2-x} = (27)^4$, maka $x = \ldots$.
  a. 14 c. 12
  b. 13 d. 11

B. Jawablah pertanyaan-pertanyaan di bawah ini dengan benar!

1. Jika $x = 9$, $y = 64$, dan $z = 36$, tentukan:
   a. $\left(\frac{1}{3}\right)^{2-x} = (27)^4$
   b. $\dfrac{x^{\frac{4}{3}}\sqrt{y^2 z^{\frac{1}{2}}}}{xy^{-1}z^3}$
   c. $\dfrac{x^{\frac{5}{2}}y^2 z}{z^{\frac{3}{2}}}$
   d. $\dfrac{x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}}}{z^{-2}}$

2. Lima bakteri membelah diri menjadi dua setiap detik. Berapakah banyak bakteri setelah 12 detik?

3. Tulislah tiga suku berikutnya dari masing-masing barisan berikut ini.
   a. 25, 19, 13, 7, 1, -5, ...
   b. $3a - 2b$, $4a - b$, $5a$, $6a + b$, ...
   c. 4, 8, 16, 32, 64, ...
   d. $12, -4, \frac{4}{3}, -\frac{4}{9}, \ldots$

4. Diketahui deret aritmatika $8, \frac{19}{3}, \frac{14}{3}, 3, \ldots$ Tentukanlah:
   a. a, b, dan S_n
   b. U_{12}
   c. S_{12}

5. Jumlah ketiga bilangan barisan aritmatika adalah 24. Jika bilangan pertama dikurangi 1 dan bilangan kedua dikurangi 2, ketiga bilangan tersebut membentuk barisan geometri. Carilah barisan geometri tersebut.

GLOSARIUM

Akar. Suatu operasi aljabar yang biasanya dinyatakan dengan simbol .

Bangun ruang. Bangun berdimensi tiga, karena mengandung tiga unsur, yaitu panjang, lebar, dan tinggi.

Bangun-bangun sebangun. Disebut juga bangun-bangun serupa, sama bentuknya. Bangun yang sama bentuknya tidak tergantung pada besar atau kecilnya bangun.

Barisan bilangan. Mengurutkan bilangan-bilangan menurut suatu aturan tertentu.

Deret aritmatika. Deret hitung (penjumlahan suku-suku pada barisan aritmatika).

Deret geometri tak hingga. Deret geometri yang banyak sukunya tak hingga.

Deret geometri. Deret ukur (penjumlahan suku-suku pada barisan geometri).

Deret. Penjumlahan suku-suku suatu barisan.

Diagram batang. Diagram (gambar) yang disajikan dalam bentuk batang.

Diagram garis. Diagram (gambar) yang disajikan dalam bentuk garis.

Diagram lambang (piktogram). Diagram yang menyatakan suatu peristiwa dengan bantuan kenyataan yang disederhanakan atau diperkecil.

Diagram lingkaran. Diagram yang menggunakan daerah lingkaran untuk menggambarkan suatu keadaan.

Diagram. Gambaran untuk memperlihatkan atau menerangkan sesuatu.

Diameter. Garis tengah lingkaran.

Frekuensi kumulatif. Frekuensi yang dijumlahkan.

Frekuensi. Kekerapan (seringnya muncul suatu data).

Interval. Nilai selisih antara batas bawah dan batas atas yang menentukan suatu kelas.

Isi/volume. Ukuran bangun ruang.

Jari-jari. Garis lurus dari titik pusat ke keliling lingkaran.

Kerucut. Benda (ruang) yang beralas bundar dan meruncing sampai ke satu titik.

Kongruen. Sama dan sebangun.

Lingkaran. Tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama dengan satu titik tertentu.

Mean. Rata-rata.

Median. Ukuran (nilai) tengah dalam suatu kelompok ukuran setelah data diurutkan.

Modus. Nilai yang sering muncul.

Pangkat. Perkalian berulang dengan faktor-faktor yang sama.

Range. Sebaran, selisih antara angka data tertinggi dengan angka data yang terendah.

Rasio. Perbandingan.

Statistik. Kumpulan data, baik bilangan maupun nonbilangan yang disusun dalam tabel atau diagram yang menggambarkan atau melukiskan suatu masalah.

Statistika. Pengetahuan yang berhubungan dengan cara-cara pengumpulan data, pengolahan, penganalisisannya dan penarikan kesimpulan berdasarkan data dan penganalisaan yang dilakukan.

Tabel. Daftar.

DAFTAR PUSTAKA

Adinawan, M. Cholik, dkk. 2004. *Seribu Pena Matematika SMP Untuk Kelas IX*. Jakarta: Erlangga.

Atkinson, S. 1992. *Mathematics with Reason*. Portsmouth: Heinemann.

Anvil, D.L, Poluga, C. 1985. *Elementary Aljabar.* Addison: Wesley-Publishing Co.

Depdiknas. 2006. *Kurikulum Tingkat Satuan Pendidikan Mata Pelajaran Matematika Sekolah Menengah Tingkat Pertama dan Madrasah Tsanawiyah*. Jakarta: Depdiknas.

Devine, Donald & Kaufmann, Jerome. 1977. *Elementary Mathematics.* New York: John Wiley & Sons.

Purcell, Edwin. 1994. *Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid I, alih bahasa: I Nyoman Susila, dkk*. Jakarta: Erlangga.

INDEKS

O

P

R

S

T

V

Kunci

Bab I Kesebangunan Bangun Datar

A. Pilihan Ganda

1.	b	7.	d	13.	b
3.	d	9.	c	15.	a
5.	c	11.	b		

B. Esei

1. $\angle SPQ = \angle QRS$
   $\angle PSQ = \angle RQS$
   $\angle PQS = \angle RSQ$
3. PQ = 24 cm]
5. 3,5 m

Bab II Bangun Ruang Sisi Lengkung

A. Pilihan Ganda

1.	b	7.	d	13.	a
3.	b	9.	c	15.	b
5.	d	11.	c		

B. Esei

1. bola
3. Rp3.010.063,12
5. $t = 4r$

Bab III Statistika dan Peluang

A. Pilihan Ganda

1.	a	7.	c	13.	c
3.	b	9.	c	15.	b
5.	c	11.	b		

B. Esei

1. a. 6,3
   b. 7
   c. 7
3. a. $\frac{1}{4}$
   b. $\frac{1}{4}$
   c. $\frac{1}{2}$
5. a. 105
   b. 45

Latihan Semester I

A. Pilihan Ganda

2.	c	12.	c	22.	a	32.	b
4.	a	14.	d	24.	a	34.	b
6.	c	16.	b	26.	d	36.	c
8.	b	18.	c	28.	d	38.	d
10.	c	20.	c	30.	c	40.	b

B. Esei

1. 7,8 m
3. a. $\frac{7}{36}$
   b. $\frac{5}{9}$
   c. $\frac{1}{6}$
5. 8,6 cm

Bab IV Bilangan Berpangkat dan Bentuk Akar

A. Pilihan Ganda

1.	d	7.	b	13.	a
3.	a	9.	b	15.	b
5.	d	11.	a		

B. Esei

1. 8,82
3. $x = 2$
5. $\frac{12 + 4\sqrt{2}}{13}$

Bab V Barisan dan Deret Bilangan

A. Pilihan Ganda

1.	d	7.	a	13.	a
3.	d	9.	a	15.	b
5.	c	11.	c		

B. Esei

1. 60,55
3. $\frac{1}{2^{n-1}}$
5. –39.321

Latihan Semester II

A. Pilihan Ganda

1.	b	7.	d	13.	a
3.	b	9.	d	15.	b
5.	a	11.	b		

B. Esei

3. a. -11, -17, -23
   b. 7a + 2b, 8a + 3b, 9a + 4b
   c. 128, 256, 512
   d. $\frac{4}{27}, \frac{-4}{71}, \frac{4}{213}$
5. $2\,3\,\frac{1+\sqrt{273}}{2}, 2\,2, 24 - \frac{1+\sqrt{273}}{2}$

ISBN 979 462 814 x

Buku ini telah dinilai oleh Badan Standar Nasional Pendidikan (BSNP) dan telah dinyatakan layak sebagai buku teks pelajaran berdasarkan Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 46 Tahun 2007 tanggal 5 Desember 2007 tentang Penetapan Buku Teks Pelajaran yang Memenuhi Syarat Kelayakan untuk Digunakan dalam Proses Pembelajaran.

HET (Harga Eceran Tertinggi) Rp11.832,00